UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Desigualdades matemáticas clásicas

Autor/es

CRISTINA BERMEJO MORENO

Director/es

JOSÉ LUIS ANSORENA BARASOAIN

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2016-17

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Desigualdades matemáticas clásicas

Alumno:

Cristina Bermejo Moreno

Tutores:

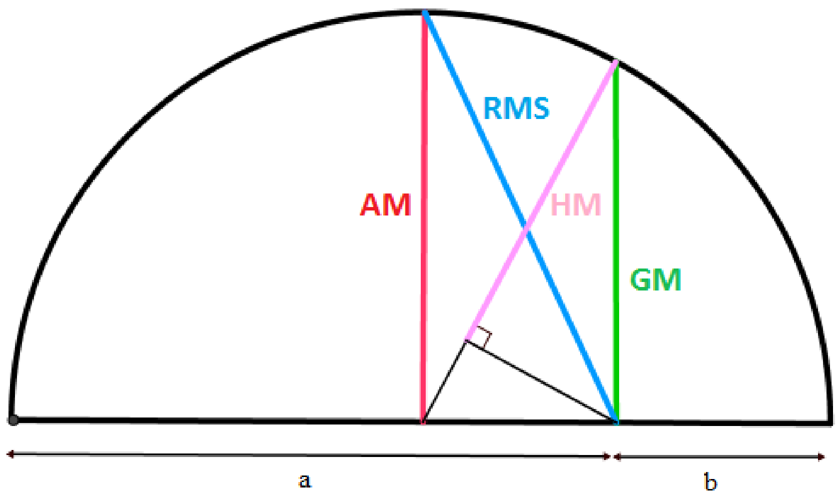
José Luis Ansorena Barasoain

Logroño, 23 de junio de 2017

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN MATEMÁTICAS

DESIGUALDADES MATEMÁTICAS CLÁSICAS



Cristina Bermejo Moreno

dirigido por

José Luis Ansorena Barasoain

Universidad de La Rioja

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas y Computación

Curso 2016/17

Resumen

En esta memoria recogemos algunas de las desigualdades más importantes en Matemáticas, sus orígenes y aplicaciones. En concreto, nos centramos en el estudio de la desigualdad de Jensen, de medias, Cauchy-Schwarz, Hölder, de reordenamiento, Chebyshev, Muirhead y Schur.

Para el estudio de cada desigualdad, hemos dividido el trabajo en ocho capítulos. Cada capítulo consta de dos partes bien diferenciadas: una primera parte teórica y una segunda, práctica. Comenzaremos con el enunciado y demostración de teoremas y resultados relativos a la desigualdad a tratar. En la medida de lo posible, buscaremos combinar demostraciones matemáticamente sencillas con otras que requieren un mayor nivel de abstracción y complejidad. Seguidamente, resolveremos ejercicios y problemas extraídos, principalmente, de la Olimpiada Matemática Española y la Olimpiada Matemática Internacional (IMO por sus siglas en inglés). Cabe destacar que la IMO es la más antigua, y pionera, de las Olimpiadas Internacionales de Ciencias.

Veremos, además, algunas interesantes aplicaciones prácticas de estas desigualdades.

Hemos incluido, siempre que ha sido posible, notas biográficas sobre los matemáticos que descubrieron las desigualdades o fueron pioneros en su uso y que, en muchos casos, les dieron su nombre.

Abstract

In this report we gather some of the most important inequalities in Mathematics, including their origins and applications. In particular, we focus on the study of Jensen's inequality, the generalized mean inequality, Cauchy-Schwarz inequality, Hölder's inequality, the rearrangement inequality, Chebyshev's inequality, Muirhead's inequality and Schur's inequality.

In order to isolate the study of each inequality, we have divided this work into eight chapters. Each chapter is devoted to one inequality and consists of two different parts: the theoretical one and the practical one. We will start with the statement and proof of some theorems and results related to the inequality we are dealing with. We emphasize that, as far as possible, we will try to combine simple mathematical proofs with others requiring a higher level of abstraction and complexity. Straightaway, we will solve some exercises and problems mainly extracted from the Spanish Mathematical Olympiad and the International Mathematical Olympiad (IMO). It should be pointed out that the IMO is a pioneer scientific contest and the most ancient one of all the International Science Olympiads.

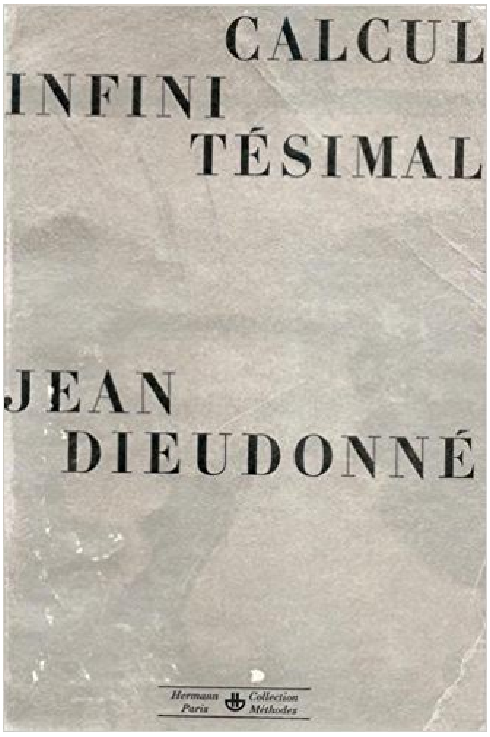
Besides, we will provide the reader with some interesting practical applications of these inequalities.

We have included, whenever possible, some biographical notes about the mathematicians who, either discovered the inequalities or were pioneers in their use. In many cases, these inequalities are named after them.

Índice general

Le Calcul infinitésimal, [...], est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mot: majorer, minorer, approcher.

Jean Dieudonné, Calcul Infinitésimal, (1968)



Introducción

En traducción libre, la nota del matemático francés del grupo Bourbaki Jean Dieudonné, extraída de su manual de Cálculo Infinitesimal [4], dice que "el Cálculo Infinitesimal consiste en aprender a manejar las desigualdades tan bien como las igualdades, y lo podríamos resumir en tres palabras: mayorar, minorar, aproximar". Tres palabras pueden parecer pocas para describir qué es el Cálculo Infinitesimal y, por extensión, el Análisis Matemático. Sin embargo, minorar y mayorar son dos divisiones de la misma acción (acotar), y aproximar es acotar por números reales positivos arbitrariamente pequeños. Así que, permitidnos resumir el Análisis Matemático en la acción de acotar. Y, como Jean Dieudonné remarca, la base para acotar es manejar desigualdades.

En este trabajo pretendemos presentar, demostrar y utilizar algunas de las desigualdades matemáticas clásicas más sencillas y conocidas. Muchas de estas desigualdades, aunque pueden enunciarse como sencillas desigualdades numéricas, pueden también interpretarse en el contexto de la Teoría de integración abstracta o, incluso, del Análisis Funcional. En estos casos, incluiremos diferentes enunciados y demostraciones. De esta manera, pretendemos que el manuscrito tenga diferentes lecturas y sea útil tanto para lectores de un nivel preuniversitario como para Graduados en Matemáticas. Asimismo hemos intentado, siempre que nos ha sido posible, buscar las raíces históricas de las desigualdades y de sus autores.

Las demostraciones de los resultados y aplicaciones que daremos están, en muchos casos, extraídas de libros de problemas orientados a concursos matemáticos, fundamentalmente de la Olimpiada Matemática Española y de la Olimpiada Matemática Internacional ([5, 3, 1]) y de recursos electrónicos ([7, 8, 10, 11]). Algunas ideas son también propias. Las referencias básicas para los enunciados y demostraciones desde el punto de vista de la Teoría de integración abstracta han sido los textos clásicos de Análisis Matemático [6] y [9].

Capítulo 1

La desigualdad de Jensen

Johan Ludwig William Valdemar Jensen (Nakskov, 8 de mayo de 1859 - Copenhague, 5 de marzo de 1925), más conocido como Johan Jensen, fue un matemático e ingeniero danés. Con 17 años fue inscrito en el Colegio de Tecnología de Copenhague, ciudad en la que años más tarde se convirtió en respetado ingeniero de la Compañía Telefónica, llegando a ocupar el puesto de Jefe de la Oficina Técnica de Investigación (1890). Aunque estudió Matemáticas en la Universidad, su conocimiento a nivel avanzado de esta materia lo logró de manera autodidacta. Todos sus trabajos matemáticos los llevó a cabo en su tiempo libre. Publicó un trabajo de investigación y presidió la Sociedad Matemática Danesa de 1892 a 1903.

Ha pasado a la historia por ser la primera persona que se interesó por un fenómeno característico de las funciones continuas no lineales (cóncavas o convexas), conocido como *Desigualdad de Jensen*. Esta propiedad aparece en múltiples contextos y tiene diversas aplicaciones en ámbitos como el financiero o el sanitario.

1.1. Introducción

Sea $I = (a, b)$ un intervalo de números reales, φ una función definida sobre I con valores en $\mathbb{R}$. Decimos que φ es *convexa* si

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y) \quad \text{para todo } x, y \in I, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{1.1}$$

En caso de que la desigualdad en (1.1) sea estricta, excepto en los casos triviales en que $x = y$ o $\lambda \in \{0, 1\}$, decimos que f es *estrictamente convexa*. Cuando la desigualdad que obtenemos en (1.1) es la contraria, decimos que f es *cóncava*. O sea, φ es cóncava si y sólo si $-\varphi$ es convexa. De manera similar definimos cuándo una función es estrictamente cóncava.

Si una función es convexa en (a, b) entonces se tiene que

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(v) - \varphi(u)}{v - u}, \quad s < t, \quad u < v, \quad s \leq u, \quad t \leq v. \tag{1.2}$$

De nuevo, para φ estrictamente convexa, las desigualdades son estrictas excepto en los casos triviales. Esta desigualdad significa que *si una función es convexa, las ratio de crecimiento son crecientes.* De hecho, la implicación contraria es cierta. Si se cumple que

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(v)-\varphi(s)}{v-s}, \quad s \leq t < v, \tag{1.3}$$

la función es convexa (estrictamente convexa si la desigualdad es estricta).

De (1.2) se deduce que toda función convexa es continua y que para todo $a < x < b$ existen las derivadas laterales

$$\varphi'(x^-) = \lim_{y\to x^-} \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} = \sup_{a<t<s\leq x} \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \tag{1.4}$$

$$\varphi'(x^+) = \lim_{y\to x^+} \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} = \inf_{y\leq t<s<b} \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \tag{1.5}$$

y, además,

$$\varphi'(x^-) \leq \varphi'(x^+) \leq \varphi'(y^-) \leq \varphi'(y^+), \quad a < x < y < b, \tag{1.6}$$

donde $\varphi'(x^+) < \varphi'(y^-)$ si φ es estrictamente convexa.

Naturalmente, una función convexa no tiene por qué ser derivable en todos sus puntos (la función $|\cdot|$ es un importante ejemplo). Sin embargo, (1.6) conduce de modo sencillo a caracterizaciones de la convexidad de funciones derivables.

Teorema 1. *Sea $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable.*

- *φ es convexa si y sólo si φ' es creciente.*
- *φ es estrictamente convexa si y sólo si φ' es estrictamente creciente.*

Teorema 2. *Sea $\varphi\colon I = (a,b) \to \mathbb{R}$ dos veces derivable.*

- *φ es convexa si y sólo si $\varphi''(t) \geq 0$ para todo $t \in I$.*
- *φ es estrictamente convexa si y sólo si $\varphi'' > 0$ excepto quizás en un conjunto de interior vacío.*

Comentario. Se tienen las siguientes propiedades elementales relativas a la convexidad:

- Si f es una función convexa entonces la función opuesta $-f$ es cóncava, y viceversa.
- Si f y g son funciones convexas entonces $f+g$ sigue siendo una función convexa.
- Si f es estrictamente convexa en $(0,a)$ entonces $x \mapsto f(a-x)$ es estrictamente convexa en $(0,a)$.
- Si f es estrictamente convexa en (a,b) y $c \in \mathbb{R}$ entonces $x \mapsto c + f(x)$ es estrictamente convexa en (a,b).

Un poco más elaborada es la demostración de la siguiente propiedad.

Lema 1. *Sea $f : I \to J$ una función convexa, creciente y biyectiva. Entonces su inversa f^{-1} es cóncava.*

Demostración. Sea $f\colon I \to J$ biyectiva, x, $y \in J$, $\lambda \in [0,1]$. Probar que

$$f^{-1}((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(1-\lambda)f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y)$$

equivale a probar que

$$(1-\lambda)x + \lambda y \geq f((1-\lambda)f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y)).$$

Utilizando la convexidad de f,

$$f((1-\lambda)f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y)) \leq (1-\lambda)f(f^{-1}(x)) + \lambda f(f^{-1}(y)) = (1-\lambda)x + \lambda y.$$

$\square$

Comentario. Vamos a estudiar la convexidad o concavidad de las funciones x^{-1}, e^x, $\sin(x)$, x^a con $a \geq 1$ y $\log(x)$, que aparecerán a lo largo de este trabajo. Veamos una breve demostración de cada una de ellas (en el caso de ser posible, sin usar cálculo diferencial).

- La función $x \mapsto 1/x$ es estrictamente convexa en $(0, \infty)$.

  Demostración. Probamos la convexidad de la función sin usar cálculo diferencial, notamos que la convexidad es equivalente a la desigualdad

  $$\frac{1}{(1-\lambda)x + \lambda y} \leq (1-\lambda)\frac{1}{x} + \lambda\frac{1}{y}, \quad 0 < x, 0 < y, 0 \leq \lambda \leq 1,$$

  que a su vez equivale a

  $$1 \leq (1-\lambda)\frac{(1-\lambda)x + \lambda y}{x} + \lambda\frac{(1-\lambda)x + \lambda y}{y}, \quad 0 < x,\, 0 < y,\, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

  También es equivalente

  $$1 \leq (1-\lambda)^2 + \lambda^2 + \lambda(1-\lambda)\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right), \quad 0 < x,\, 0 < y,\, 0 \leq \lambda \leq 1,$$

  que a su vez equivale a

  $$2\lambda(1-\lambda) \leq \lambda(1-\lambda)\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right), \quad 0 < x,\, 0 < y,\, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

  El resultado se obtiene combinando la desigualdad $\lambda(1-\lambda) \geq 0$ para todo $0 \leq \lambda \leq 1$, con igualdad para $\lambda \in \{0, 1\}$, con la desigualdad $2 \leq x/y + y/x$ para todo x, $y > 0$, con igualdad cuando $x = y$ (ver Lema 2). □

- La función exponencial $x \mapsto e^x$ es estrictamente convexa.

  Demostración. La función exponencial se define como

  $$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

  Esta expresión nos da fácilmente que $\exp'' = \exp > 0$. También es claro que exp es una función real de variable real y que $\exp(x) > 0$ si $x > 0$. Puesto que $\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w)$ (no incluimos la demostración de este hecho) se tiene que $\exp(z) \cdot \exp(-z) = 1$ y, por tanto $\exp(x) > 0$ para todo $x \leq 0$.

  Incluimos también una demostración basada en la idea intuitiva de potenciación. Remarcamos que, sin recurrir a técnicas de funciones analíticas o series de potencias, la potenciación de base un número positivo, que debe cumplir las propiedades

  $$a^0 = 1, \quad a > 0, \tag{1.7}$$

  $$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a > 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

  $$(a^x)^y = a^{xy}, \quad a > 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

  puede definirse de la siguiente manera:

  - a^n, con $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ es el producto de a consigo mismo n veces.
  - $a^{1/n}$, con $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ es la raíz n-ésima positiva de a.
  - La igualdad (1.9) nos determina el valor de a^x con $a > 0$ y x racional positivo.

- Ahora las igualdades (1.7) y (1.9) nos determinan el valor de a^x con $a > 0$ y x racional cualquiera.
- Puesto que los racionales son densos en los reales, definimos a^x, con $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, por aproximación.

Probemos ahora la convexidad de las funciones $\varphi_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $\varphi_a(x) = a^x$. Gracias a (1.3) es suficiente probar que

$$\frac{a^t - a^s}{t - s} < \frac{a^v - a^s}{v - s}, \quad a > 0, \quad s \le t < v.$$

Multiplicando por a^{-s} y considerando $t - s = x$, $v - s = y$, basta probar

$$\frac{a^x - 1}{x} < \frac{a^y - 1}{y}, \quad a > 0, \quad 0 \le x < y.$$

Por aproximación, es suficiente considerar x e y racionales. Por tanto, escribiendo $x = m/k$, $y = n/k$ con k, m, n enteros positivos, y multiplicando por $1/k$ basta probar,

$$\frac{a^{m/k} - 1}{m} < \frac{a^{n/k} - 1}{n}, \quad a > 0, \quad 0 \le m < n, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Tomando ahora $b = a^{1/k}$ basta probar

$$\frac{b^m - 1}{m} < \frac{b^n - 1}{n}, \quad b > 0, \quad 0 \le m < n, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Por el principio de inducción, basta considerar el caso $m = n - 1$. Por tanto basta probar que

$$(n-1)(b^n - 1) - n(b^{n-1} - 1) > 0, \quad b > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Para este fin realizamos la manipulación

$$(n-1)(b^n - 1) - n(b^{n-1} - 1) = n(b^n - b^{n-1}) - (b^n - 1) = (b-1)\left(nb^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} b^k\right) > 0.$$

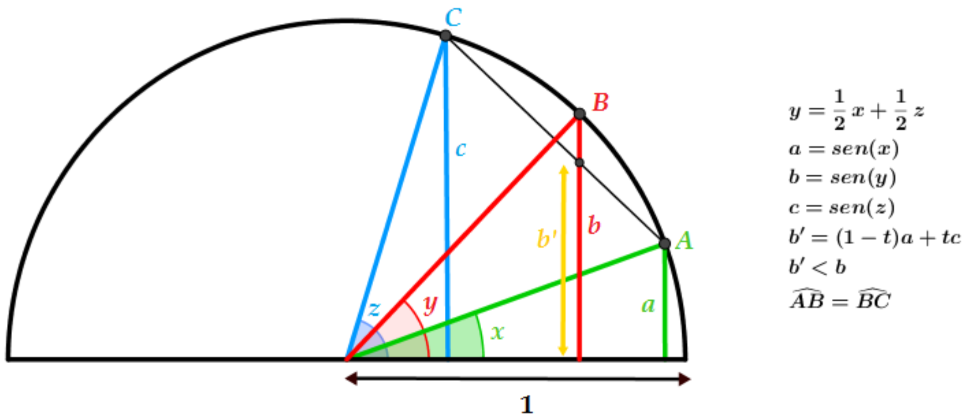
□

- La función $x \mapsto \sin(x)$ es estrictamente cóncava en el intervalo $(0, \pi)$.

Demostración. La manera más precisa de demostrar este hecho es utilizar la definición de la función seno, que se realiza a partir de la función exponencial. Tenemos que

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

de donde se deduce fácilmente que sin es una función real de variable real. Demostrar que $\sin(x) > 0$ para $0 < x < \pi$ requiere algo de técnica (para hacerlo debemos definir π como el doble del menor valor positivo en el que se anula la función coseno). Pero, si damos esto por bueno, la concavidad estricta es consecuencia del hecho $\sin'' = -\sin 0$.
No obstante, también es posible una demostración de la concavidad para números reales entre 0 y π (o ángulos en el primer y segundo cuadrante), basada en la definición intuitiva y geométrica de la función sin: el seno de un ángulo x es la distancia entre el eje de abcisas y el punto de corte entre la semirrecta que determina el ángulo y la circunferencia unidad. Incluimos una demostración sin palabras.



□

- La función $x \mapsto x^a$, $a \geq 1$ es convexa.

  Demostración. La convexidad es equivalente a la desigualdad

$$((1-\lambda)x + \lambda y)^a \leq (1-\lambda)x^a + \lambda y^a$$

  Llamamos $y/x = u$ (el caso $x = 0$ es sencillo) y nos queda

$$((1-\lambda) + \lambda u)^a \leq (1-\lambda) + \lambda u^a$$

  Por tanto, basta probar esta última, que puede escribirse de la forma

$$(1 + \lambda(u-1))^a \leq 1 + \lambda(u^a - 1)$$

  y sabemos que es cierta por el Lema 2.1. La igualdad se da cuando $u = 1$, o sea $x = y$. □

- La función $\log\colon (0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ es cóncava. Este hecho es consecuencia de la convexidad de la función exponencial.

1.2. La desigualdad de Jensen discreta

En muchas ocasiones, sobre todo en aplicaciones a la resolución de problemas, es suficiente con utilizar una versión discreta de la desigualdad de Jensen. Por ese motivo, y en nuestro intento de incluir en nuestras notas demostraciones que un alumno preuniversitario o recién llegado a la Universidad pueda entender, comenzamos con una demostración elemental de esta versión de la desigualdad.

Teorema 3 (Desigualdad de Jensen, versión discreta)**.** *Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dados números $\lambda_k \geq 0$, $a < x_k < b$ $(k = 1,\dots,n)$ tales que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, entonces,*

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k). \tag{1.10}$$

En caso de que φ sea estrictamente convexa la desigualdad es estricta, excepto en los casos triviales en los que exista k tal que $\lambda_k = 1$ o existe x tal que $x_k = x$ para todo $k = 1, \dots, n$.

Para una función cóncava se obtiene un resultado similar, cambiando el sentido de la desigualdad.

Demostración. En caso de que exista k tal que $\lambda_k = 1$, entonces $\lambda_j = 0$ para $j \neq k$ y es evidente que se verifica la igualdad en (1.10).

En caso de que exista x tal que $x_k = x$ para todo $k = 1,\dots n$, entonces $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = x$ y es evidente que se cumple la igualdad en (1.10).

Tras estas consideraciones previas, basta probar la desigualdad en el caso en que $\lambda_k > 0$ para todo $k = 1, \dots, n$. Lo haremos por el método de inducción.

- *Base de inducción.* Para $n = 2$ la desigualdad del enunciado es

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

donde λ_1 y λ_2 son números positivos con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Tomando $x_1 = x, x_2 = y$, $\lambda_1 = \lambda$, observamos que esta desigualdad es exactamente la de la definición de función convexa (1.1). Explícitamente,

$$\begin{gathered} f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \\ f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2), \\ f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \le \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y). \end{gathered}$$

Igualmente, que la desigualdad sea estricta, excepto en los casos triviales, es consecuencia de la definición de convexidad estricta, por lo que se cumple la base de inducción.

- *Paso de inducción.* Supongamos que la desigualdad (1.10) es cierta para un número natural $n \ge 2$ y probemos que, en tal caso, también es cierta para $n + 1$.

Sean $\lambda_k > 0$, $a < x_k < b$ $(k = 1, \dots n+1)$ tales que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$. Ya hemos remarcado que $\lambda_{n+1} \neq 1$. Consideramos

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} > 0, \quad k = 1, \dots, n \\ x &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \frac{1}{1 - \lambda_{k+1}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \frac{1}{1 - \lambda_{k+1}} (1 - \lambda_{k+1}) = 1.$$

Por tanto, el número x pertenece a $I = (a, b)$ porque está comprendido entre el máximo y el mínimo de los números x_k, $1 \le k \le n$. Además,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1}) x + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Usando que f es convexa, tenemos que

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \right) \le (1 - \lambda_{n+1}) f(x) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

La hipótesis de inducción aplicada a $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ con $\alpha_k > 0$ y $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ nos da

$$f(x) \le \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_k).$$

Combinando las dos últimas desigualdades se deduce que

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \right) \le (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k).$$

Además, si φ es estrictamente convexa, y no tenemos una desigualdad estricta, ambas desigualdades deben ser igualdades. Por hipótesis de inducción, $x_k = x$ $(k = 1, \dots, n)$. Por definición de convexidad estricta, $x = x_{n+1}$. □

1.3. La desigualdad de Jensen en la teoría de integración

Damos a continuación un enunciado abstracto (en términos de integrales respecto de medidas de probabilidad) de la desigualdad de Jensen. Antes de ello, notamos que para una función convexa $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ existen los límites laterales.

$$\varphi(a^+) := \lim_{t\to a^+} \varphi(t), \quad \varphi(b^-) := \lim_{t\to b^-} \varphi(t). \tag{1.11}$$

En consecuencia, φ se extiende de manera natural a una función definida en $[a,b]$ con valores en $[-\infty,\infty]$. El enunciado que sigue debemos entenderlo en este sentido.

Teorema 4 (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea μ una medida positiva sobre una σ-álgebra Σ en un conjunto Ω tal que $\mu(\Omega) = 1$. Sea $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Σ-medible tal que $a \le f(\omega) \le b$ para todo $\omega \in \Omega$. Entonces*

$$\varphi\left(\int_\Omega f\, d\mu\right) \le \int_\Omega (\varphi\circ f)\, d\mu, \tag{1.12}$$

siempre que ambas integrales en la desigualdad tengan sentido. En caso de que φ sea estrictamente convexa, la desigualdad es estricta excepto en los siguientes casos:

- *El caso trivial en el que f es constante μ-c.t.p.*
- $b = \int_\Omega f\, d\mu = \infty = \varphi(\infty)$.
- $a = \int_\Omega f\, d\mu = -\infty$, $\varphi(-\infty) = \infty$.
- $b = \int_\Omega f\, d\mu = \infty$, $\int_\Omega \varphi\circ f\, d\mu = -\infty$.
- $a = \int_\Omega f\, d\mu = -\infty$, $\int_\Omega \varphi\circ f\, d\mu = -\infty$.

Nota. En el Teorema 4 admitimos la posibilidad de que tanto la función f como la media $\int_\Omega f\, d\mu$ tomen valores en los extremos del intervalo. En este caso debemos considerar la extensión de φ dada por (1.11). También debemos admitir la posibilidad de que las integrales tomen valores en $[-\infty,\infty]$. Para ello definimos

$$\int_\Omega g\, d\mu = \int_\Omega g^+\, d\mu - \int_\Omega g^-\, d\mu, \quad g\colon \Omega \to [-\infty,\infty] \quad \Sigma-\text{medible},$$

siempre que no lleguemos a una expresión no definida, que sucede únicamente cuando $\int_\Omega g^+\, d\mu = \int_\Omega g^-\, d\mu = \infty$. En el enunciado admitimos implícitamente que las integrales involucradas tienen sentido.

Demostración. En caso de que exista $a \le m \le b$ tal que $f = m$ μ-c.t.p. entonces $\int_\Omega f\, d\mu = m$, $\int_\Omega \varphi\circ f\, d\mu = \varphi(m)$, y se da la igualdad en (1.12). Llamemos

$$x = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Si $x = a$ entonces $f = a > -\infty$ μ-c.t.p. mientras que si $x = b < \infty$ entonces $f = b$ μ-c.t.p. En ambos casos, estamos en la situación trivial. Por tanto, debemos distinguir tres casos:

Caso 1. Supongamos que $a < x < b$.

Sea $\beta = \varphi'(x^-)$ definida como en (1.4). Gracias a (1.6) tenemos para $a < t < x < s < b$,

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(t)}{x-t} \le \beta \le \frac{\varphi(s)-\varphi(x)}{s-x}.$$

Quitando denominadores en cada desigualdad deducimos que

$$\varphi(y) \ge \varphi(x) + (y-x)\beta \tag{1.13}$$

para todo $y \in (a,b)$.

Por tanto:

$$\varphi(f(\omega)) - \varphi(x) - (f(\omega)-t)\beta \ge 0 \tag{1.14}$$

para todo $\omega \in \Omega$.

Como φ es continua, $\varphi \circ f$ es medible. Integrando esta desigualdad, teniendo en cuenta tanto que μ es una medida de probabilidad como la linealidad y monotonía de la integral,

$$\int_\Omega \varphi(f(\omega))\, d\mu(\omega) - \varphi(x) - \left(\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) - t\right)\beta \geq 0.$$

Como $\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) = t$ nos queda

$$\int_\Omega \varphi(f(\omega))\, d\mu(\omega) - \varphi(x) \geq 0.$$

Es decir,

$$\int_\Omega \varphi(f(\omega))\, d\mu(\omega) \geq \varphi(x),$$

que es la desigualdad perseguida.

Supongamos, dentro de este primer caso, que φ es estrictamente convexa. Entonces (1.13) es una desigualdad estricta excepto cuando $y = x$. Por tanto (1.14) es una desigualdad estricta excepto cuando $f(\omega) = x$. Integrando, obtenemos una desigualdad estricta salvo cuando $f = x$ μ-c.t.p.

Caso 2. Sea $x = b = \infty$.

Si la función φ es decreciente se obtiene

$$\varphi(\infty) \leq \varphi(f),$$

e integrando llegamos a la desigualdad requerida. Además cuando φ es estrictamente convexa se tiene

$$\varphi(\infty) < \varphi(f),$$

e integrando obtenemos una desigualdad estricta, excepto quizás cuando $\varphi(\infty) = -\infty$.

Si la función no es decreciente, tomamos $a < c < d < \infty$ tales que $\varphi(c) < \varphi(d)$. Se tiene que

$$\frac{\varphi(d) - \varphi(c)}{d - c} \leq \frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t - c}, \quad c < t.$$

Por tanto,

$$\frac{\varphi(d) - \varphi(c)}{d - c}(t - c) + \varphi(c) \leq \varphi(t), \quad c < t.$$

De aquí se deduce que $\varphi(\infty) = \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. Denotamos

$$A = \{\omega \colon f(\omega) > c\}$$

y consideramos las funciones

$$\begin{aligned} f_1 &= (f - c)\chi_A \\ f_2 &= c\chi_A + f\chi_{\Omega\setminus A}. \end{aligned}$$

Se tiene que $f = f_1 + f_2$ y que $f_2 \leq c$. Por tanto $\int_\Omega f_2\, d\mu \leq c < \infty$ y en consecuencia, $\int_\Omega f_1\, d\mu = \infty$. Además,

$$\frac{\varphi(d) - \varphi(c)}{d - c} f_1 + \varphi(c) \leq \varphi(f)\chi_A.$$

De lo anterior deducimos que $\int_\Omega \varphi(f)\chi_A\, d\mu = \infty$. Por tanto, siempre que $\int_\Omega \varphi(f)\, d\mu$ tenga sentido ha de ser $\int_\Omega \varphi(f)\, d\mu = \infty$.

Caso 3. Sea $x = a = -\infty$.

Basta aplicar el caso 2 a la función medible $-f$ y la función convexa $\varphi(-\cdot)$.

$\square$

Comentario. La demostración que presentamos de la desigualdad de Jensen no sigue los pasos habituales en tería de integración, que consisten en verificar primero el resultado para funciones simples y después extenderlo por aproximación. Notamos que para $f = \sum_i^N a_i \chi_{A_i}$ simple, con $A_i \in \Sigma$ dos a dos disjuntos tales que $\cup_{i=1}^N A_i = \Omega$, tenemos

$$\int_\Omega \varphi \circ f \, d\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \varphi(a_i)\chi_{A_i} d, \mu = \sum_{i=1}^N \varphi(a_i)\mu(A_i),$$

$$\varphi\left(\int_\Omega \varphi \circ f \, d\mu\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i)\right),$$

$$\sum_{i=1}^N \mu(A_i) = \mu(\Omega) = 1.$$

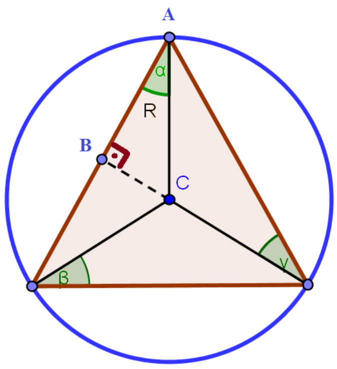
Por tanto, la desigualdad de Jensen (1.12) para una tal función f, es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Jensen discreta (1.10). Sin embargo, no es evidente cómo extender el resultado de funciones simples a funciones medibles. Puesto que no imponemos ni que las funciones sean positivas ni que sean integrables, no disponemos para nuestros propósitos ni del teorema de la convergencia monótona ni del teorema de la convergencia dominada.

1.4. Problemas

Pasemos a ver aplicaciones de esta desigualdad en la resolución de problemas. Primero trataremos un problema geométrico y después demostraremos la conocida desigualdad de Nesbitt.

Problema 1. *Dado un triángulo inscrito en una circunferencia, probad que el de mayor área es equilátero.*

Solución. Consideremos el triángulo de la figura:



Observamos que los ángulos α, β y γ suman $\pi/2$.

El área del triángulo formado por los puntos A, B , C es

$$\frac{R^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2}.$$

Teniendo en cuenta la fórmula del ángulo doble ($2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$) el doble del área limitada por los puntos A, B y C es (notamos que la región es simétrica respecto al segmento AC)

$$\frac{R^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2} \cdot 2 = \frac{R^2 \sin(2\alpha)}{2}.$$

Sabiendo esto, pasamos a calcular el área del triángulo total, que es

$$\begin{aligned} \acute{A}rea &= \frac{R^2\sin(2\alpha)}{2} + \frac{R^2\sin(2\beta)}{2} + \frac{R^2\sin(2\gamma)}{2} \\ &= \frac{R^2(\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma))}{2} \\ &= \frac{3R^2}{2}\left(\frac{\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma)}{3}\right). \end{aligned}$$

Puesto que, como ya hemos justificado, la función $f(x) = \sin(x)$ es estrictamente cóncava en el intervalo $(0, \pi)$ podemos aplicar la desigualdad de Jensen para obtener

$$\begin{aligned}\frac{3R^2}{2}\left(\frac{\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma)}{3}\right) &\geq \frac{3R^2}{2}\sin\left(\frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{3}\right)\\ &= \frac{3R^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.\end{aligned}$$

Observamos que la igualdad se da cuando y sólo cuando $2\alpha = 2\beta = 2\gamma = \pi/3$; o sea, cuando $\alpha = \beta = \gamma = \pi/6$. Es decir, el área es máxima cuando se trata de un triángulo equilátero. □

Problema 2 (Desigualdad de Nesbitt)**.** *Dados $a, b, c > 0$, probad que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

y determinad en qué casos se alcanza la igualdad.

Solución. Esta desigualdad es homogénea, es decir, dada cierta terna de números positivos (a, b, c) que cumple la desigualdad, entonces cualquiera que sea $t > 0$, la terna (ta, tb, tc) también la cumple. Así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a + b + c = 1$. De hecho una vez probada con esta restricción, tomamos (a, b, c) terna cualquiera de números positivos; considerando

$$t = a + b + c, \quad a_0 = \frac{a}{t}, \quad b_0 = \frac{b}{t}, \quad c_0 = \frac{c}{t}, \tag{1.15}$$

se tiene que

$$a_0 + b_0 + b_0 = 1$$

y obtenemos que (a_0, b_0, c_0) cumple la desigualdad; concluimos que

$$(a, b, c) = t \cdot (a_0, b_0, c_0)$$

también la cumple.

Sean, pues, $a, b, c > 0$ tales que $a + b + c = 1$. Notamos que en este caso la desigualdad a probar es

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3}{2},$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Consideramos la función $\varphi\colon (0, 1) \to (0, \infty)$ dada por

$$\varphi(x) = \frac{x}{1-x}, \quad 0 < x < 1. \tag{1.16}$$

Notamos que φ es estrictamente convexa (lo es la función $x \mapsto \psi(x) := 1/x$ y, por tanto, también la función $x \mapsto \psi(1-x) = 1/(1-x)$).

Aplicando la desigualdad de Jensen tenemos que

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c}\right) = \frac{1}{3}(\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c)) \geq \varphi\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = \varphi(1/3) = \frac{1}{2},$$

tal y como perseguíamos. Además, la igual se alcanza, en este caso en el que hemos considerado la restricción $a + b + c = 1$, cuando y sólo cuando $a = b = c$. Volviendo al caso general, si t es como en (1.15), la igualdad se alcanza cuando

$$\frac{a}{t} = \frac{b}{t} = \frac{c}{t},$$

es decir, cuando $a = b = c$. □

Comentario. Quizás la manera más natural de demostrar que la función φ definida en (1.16) es convexa es apoyarse en que

$$\psi(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

lo es. De hecho, se tienen las siguientes propiedades elementales relativas a la convexidad,

- Si f es estrictamente convexa en $(0,a)$ entonces $x \mapsto f(a-x)$ es estrictamente convexa en $(0,a)$.
- Si f es estrictamente convexa en (a,b) y $c \in \mathbb{R}$ entonces $x \mapsto c + f(x)$ es estrictamente convexa en (a,b).

Por tanto, basta considerar que $\varphi(x) = 1 + \psi(1-x)$. Por otra parte, con el propósito de demostrar la desigualdad de Nesbitt de la manera más elemental posible, incluimos una demostración de la convexidad de ψ que no usa cálculo diferencial. Antes, enunciamos y demostramos una desigualdad elemental.

Lema 2. *Para todo $x > 0$ se tiene que*

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

con igualdad si y sólo si $x = 1$.

Demostración. Basta tener en cuenta que

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0,$$

con igualdad si y sólo si $\sqrt{x} = 1/\sqrt{x}$. □

Problema 3. *Sean a, b, c números positivos tales que $a + b + c = 1$. Probad que:*

$$\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}} \leq \frac{1}{3}.$$

Solución. Quitando la raíz cuadrada (elevando al cuadrado), la desigualdad equivale a

$$a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c} \leq \frac{1}{9}.$$

Tomando logaritmos, llegamos a la desigualdad equivalente

$$(1-a)\log a + (1-b)\log b + (1-c)\log c \leq 2\log\left(\frac{1}{3}\right).$$

Tomamos $f(x) = (1-x)\log x$. Por ser $f(x)$ cóncava, debido por ejemplo, a que

$$f''(x) = \frac{-1-x^2}{x^2} < 0, \quad x \in (0,\infty),$$

podemos aplicar la desigualdad de Jensen. Obtenemos

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) &= 3\frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3} \\ &\leq 3f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \\ &= 3f\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(1 - \frac{1}{3}\right)\log\frac{1}{3} = 2\log\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

Comentario. A continuación vamos a leer una breve biografía de Jacob Bernoulli, autor de la desigualdad que trataremos en el próximo problema.

Jakob Bernoulli (Basilea (Suiza), 27 de diciembre de 1654 - 16 de agosto de 1705), más conocido como Jacob Bernoulli por la traducción de su nombre al alemán, fue un matemático y científico ruso. Por deseo de su padre estudió Filosofía y Teología, aunque aprovechó su estancia en la Universidad para iniciarse en Matemáticas, que era su verdadera vocación.

Permitió el avance de la teoría de la probabilidad y las aplicaciones del cálculo. En su primer artículo sobre series infinitas (1689) presentó la *Desigualdad de Bernoulli*, que demostraremos a continuación. Se interesó en las propiedades de curvas como la catenaria, la tractriz, la isocrona y la espiral logarítmica. En 1960 usó por primera vez la palabra *integral*, aunque Leibniz prefirió el término *summatorius*. Contribuyó al estudio de la ecuación que hoy lleva su nombre y describió la llamada *lemniscata de Bernoulli*. Su obra más destacable fue *Ars Conjectandi*, publicada en 1713 con carácter póstumo. En ella se incluye el concepto de números de Bernoulli y el principio básico de teoría de probabilidad: el *Teorema de Bernoulli*, conocido en la actualidad como *Ley débil de los grandes números*.

Problema 4 (Desigualdad de Bernoulli). *Sea* $-1 \leq x < \infty$ *y* $a \geq 1$. *Entonces*

$$(1+x)^a \geq 1 + ax.$$

Solución. Sea $\phi(x) = (1+x)^a - 1 - ax$. Debemos probar que $\phi(x) \geq 0, \quad a \geq 1, \quad -1 \leq x < \infty$. Puesto que la función x^a es convexa, entonces $(1+x)^a$ también lo es. Además, $-1 - ax$ es una función convexa. De lo anterior concluimos que $(1+x)^a - 1 - ax$ es convexa.
Se tiene que $\phi(0) = \phi'(0) = 0$. Luego

$$\frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} > \phi'(0), \quad x > 0,$$

lo que implica que $\phi(x) > 0$, si $x > 0$.
De igual modo tenemos que

$$\frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} < \phi'(0), \quad x < 0,$$

lo que implica que $\phi(x) > 0$, si $x < 0$.
La igualdad se alcanza si y sólo si $x = 0$ o $a = 1$. $\square$

Capítulo 2

La desigualdad de medias

Comenzamos con la desigualdad clásica entre medias de orden positivo. En esta ocasión empezamos con una formulación en términos de integración abstracta y más adelante veremos la versión discreta.

2.1. Enunciado y demostración

Teorema 5. *Sean* (Ω, Σ, μ) *espacio de probabilidad,* $f \geq 0$ *medible y* $0 < p < q < \infty$*. Entonces:*

$$\left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega f^q \, d\mu\right)^{1/q} \tag{2.1}$$

para toda función medible positiva f*. Además la igualdad se da si y sólo si o bien* $\int_\Omega f^p \, d\mu = \infty$ *o bien* f *es constante* μ*-c.t.p.*

Demostración. Notamos que la función $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ dada por $\varphi(t) = t^{q/p}$ es estrictamente convexa. Además $\varphi(\infty) = \infty$. Por la desigualdad de Jensen (ver Teorema 4),

$$\left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right)^{q/p} \leq \int_\Omega (f^p)^{q/p} \, d\mu = \int_\Omega f^q \, d\mu.$$

Donde hemos usado que

$$\varphi\left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi(f^p) \, d\mu.$$

Elevando a $1/q$ ambas partes de la desigualdad anterior,

$$\left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right)^{q/pq} = \left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega f^q \, d\mu\right)^{1/q}.$$

Finalmente, notamos que de todos los casos en los que la desigualdad de Jensen produce igualdad, sólo pueden darse los dos citados. □

Es posible, además, considerar medias de orden nulo y negativo y extender los resultados en este ámbito. Primero realizamos una extensión de la desigualdad de medias a $p \in [0, \infty)$. Para ello utilizaremos que la función logaritmo es estrictamente cóncava. Notamos que este resultado es equivalente a que la función exponencial sea estrictamente convexa. De hecho se tiene la siguiente propiedad, sencilla de comprobar a partir de la definición.

- Si f es estrictamente convexa y biyectiva entonces su función inversa es estrictamente cóncava.

Teorema 6. *Sea* (X, Σ, μ) *un espacio de probabilidad. Sea* $p > 0$*. Se tiene que*

$$\exp\left(\int_\Omega \log f \, d\mu\right) \leq \left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

para toda función medible positiva f*. Además, la igualdad se da si y sólo si o bien* f *es constante* μ*-c.t.p. o bien* $\int_\Omega \log f \, d\mu = \infty$*.*

Demostración. Notamos que la función $\log\colon (0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ es función cóncava. Aplicando Jensen llegamos a

$$\int_\Omega \log f \, d\mu \leq \log\left(\int_\Omega f \, d\mu\right). \tag{2.2}$$

Dado p> 0 cualquiera, aplicando (2.2) a f^p,

$$\int_\Omega \log f \, d\mu = \frac{1}{p}\int_\Omega \log f^p \, d\mu \leq \frac{1}{p}\log\left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right) = \log\left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right)^{1/p}. \tag{2.3}$$

Aplicando la función exponencial obtenemos la desigualdad requerida. La igualdad se da si y sólo si hay igualdad en (2.3). Y según el teorema 4, eso sucede en dos casos: cuando f es constante μ-c.t.p. y cuando $\int_\Omega \log f \, d\mu = \infty$. □

Finalmente, damos una extensión de la desigualdad de medias a toda la recta real.

Teorema 7. *Sea (X,Σ,μ) un espacio de probabilidad. Sea f una función medible positiva. Definimos*

$$M_p = \left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right)^{1/p}, \quad p \neq 0;$$
$$M_0 = \exp\left(\int_\Omega \log f \, d\mu\right).$$

Se tiene que M_p crece con p. Además, si p_0 es tal que $0 < M_{p_0} < \infty$ y f no es constante μ-c.t.p., entonces $M_{p_0} < M_p$ para todo $p > p_0$.

Demostración. Basta demostrar que es creciente en $[0,\infty)$ y en $(-\infty,0]$. El crecimiento en $[0,\infty)$ es consecuencia de los dos teoremas anteriores (Teorema 5 y Teorema 6). Para probar el crecimiento en $(-\infty,0]$ basta probar que $M_s \leq M_t$ si $s < t < 0$ (caso 1) y que $M_s \leq M_0$ si $s < 0$ (caso 2).

- **Caso 1.** Considerando lo anterior (Teorema 5) para $1/f$ obtenemos

  $$\left(\int_\Omega \left(\frac{1}{f}\right)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega \left(\frac{1}{f}\right)^q d\mu\right)^{1/q}, \quad 0 < p < q.$$

  Por tanto,

  $$\left(\int_\Omega f^{-q}\right)^{-1/q} d\mu \leq \left(\int_\Omega f^{-p} \, d\mu\right)^{-1/p}, \quad 0 < p < q.$$

  Hemos obtenido $M_{-q} \leq M_{-p}$ para $0 < p < q$. Dados $s < t < 0$, como $0 < -t < -s$, se tiene $M_s \leq M_t$, con desigualdad estricta en los casos citados en el enunciado.

- **Caso 2.** Como en el caso anterior, obtenemos

  $$\exp\int_\Omega \log\frac{1}{f} \, d\mu \leq \left(\int_\Omega \left(\frac{1}{f}\right)^p d\mu\right)^{1/p}, \quad p > 0.$$

  Que conduce a

  $$\exp\int_\Omega \log f \, d\mu \geq \left(\int_\Omega f^{-p} \, d\mu\right)^{-1/p}, \quad p > 0.$$

  Es decir, obtenemos $M_{-p} \leq M_0$ para $p > 0$. Equivalentemente, tenemos $M_s \leq M_0$, para $s < 0$, con desigualdad estricta en los casos citados en el enunciado.

Combinando, obtenemos que la función crece en toda la recta real. □

Comentario. A la vista del Teorema 7 es natural preguntarse por el valor de los límites

$$\lim_{p\to\pm\infty} M_p.$$

En sencillo darse cuenta de que

$$\inf \mathrm{es}\{f(\omega)\colon \omega\in\Omega\} \leq M_p \leq \sup \mathrm{es}\{f(\omega)\colon \omega\in\Omega\}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$\inf \mathrm{es}\{f(\omega)\colon \omega \in \Omega\} \leq \lim_{p\to-\infty} M_p,$$
$$\lim_{p\to\infty} M_p \leq \sup \mathrm{es}\{f(\omega)\colon \omega \in \Omega\}.$$

Puede demostrarse que, en realidad se da la igualdad. O sea,

$$\lim_{p\to-\infty} M_p = \inf \mathrm{es}\{f(\omega)\colon \omega \in \Omega\},$$
$$\lim_{p\to\infty} M_p = \sup \mathrm{es}\{f(\omega)\colon \omega \in \Omega\}.$$

Aquí $\inf \mathrm{es}$ y $\sup \mathrm{es}$ denotan, respectivamente, el ínfimo y supremo esenciales, o sea, hablando de manera informal, el ínfimo y supremo *despreciando conjuntos de medida nula.*

La versión discreta de estas desigualdades de medias puede obtenerse a partir del resultado general. Las enuciamos y demostramos como un corolario.

Teorema 8. *Sean $a_i > 0$, $p_i > 0$, $(i = 1,\ldots n)$ tales que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Definimos*

$$M_p = \left(p_1 a_1^p + \cdots + p_i a_i^{p_i} + \cdots + p_n a_n^p\right)^{1/p}, \quad p \neq 0;$$
$$M_0 = a_1^{p_1} \cdots a_i^{p_i} \cdots a_n^{p_n}.$$

Se tiene que la función $p \mapsto M_p$ es creciente. Además, en caso de que la n-tupla $(a_i)_{i=1}^n$ no sea constante, la función es estrictamente creciente.

Demostración. Basta aplicar el Teorema 7 a la medida de probabilidad sobre el conjunto $\{1,\ldots,i,\ldots,n\}$, que al conjunto unipuntual $\{i\}$ le asigna el valor p_i $(i = 1,\ldots,n)$. Puesto que nuestras hipótesis conllevan que M_p es siempre finito, se obtiene la desigualdad escricta excepto cuando la n-tupla $(a_i)_{i=1}^n$ es constante c.t.p. Como el único conjunto de medida nula es el conjunto vacío, esto equivale a que la n-tupla sea constante. Remarcamos cómo se obtiene la expresión para la media de orden cero en este caso concreto:

$$M_0 = \exp\left(\sum_{i=1}^n \log(a_i) p_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \log(a_i^{p_i})\right) = \prod_{i=1}^n a_i^{p_i}.$$

□

La versión más clásica del Teorema 8 sucede cuando todos los p_i coinciden (y por tanto son iguales a $1/n$). Si pensamos que p_i es un *peso* que colocamos en cada índice, esto significa que todos los p_i tienen el mismo valor. De modo que el siguiente resultado puede llamarse *desigualdad entre medias discreta y equilibrada.*

Corolario 1. *Sean $a_i > 0$, $(i = 1,\ldots n)$. Definimos*

$$M_p = M_p = \left(\frac{a_1^p + \cdots + a_i^p + \cdots + a_n^p}{n}\right)^{1/p}, \quad p \neq 0;$$
$$M_0 = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_i \cdots a_n}.$$

Se tiene que la función $p \mapsto M_p$ es creciente. Además, en caso de que la n-tupla $(a_i)_{i=1}^n$ no sea constante la función es estrictamente creciente.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 8. □

Remarcamos que algunas de las medias involucradas en el Corolario 1 son tan clásicas en la literatura matemática que tienen su propio nombre.

- $M_1 = \dfrac{a_1 + \cdots + a_i + \cdots + a_n}{n}$ es la media aritmética.
- $M_2 = \left(\dfrac{a_1^2 + \cdots + \cdots + a_i^2 + \cdots + a_n^2}{n}\right)^{1/2}$ es la media cuadrática.

- $M_{-1} = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_i} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$ es la media armónica.
- $M_0 = (a_1 \cdots a_i \cdots a_n)^{1/n}$ es la media geométrica.

La relación entre todas ellas que se obtiene a partir del Corolario 1 es

$$\text{mín}\{a_1, \dots, a_n\} \leq M_{-1} \leq M_0 \leq M_1 \leq M_2 \leq \text{máx}\{a_1, \dots, a_n\}.$$

A continuación, mostramos una demostración de la desigualdad discreta entre medias (Teorema 8) que no usa herremientas de integración. Antes, necesitamos tres resultados previos.

Lema 3. *Sean $0 < t \leq 1$, $1 < r$, $1 \leq u$. Se tiene que*

$$(1 + t(u-1))^r \leq 1 + t(u^r - 1).$$

Con desigualdad estricta salvo que $u = 1$.

Demostración. Para cada r, t fijos consideramos la función $g\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(u) = 1 + t(u^r - 1) - (1 + t(u-1))^r.$$

Puesto que $g(1) = 0$, debemos probar que $g(u) > 0$ para todo $u > 1$. Basta probar que g es estrictamente creciente. Derivando respecto de $u \in (1, \infty)$,

$$\begin{aligned} g'(u) &= rtu^{r-1} - rt(1 + t(u-1))^{r-1} \\ &= rt(u^{r-1} - (1 + t(u-1))^{r-1}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $1+t(u-1) \leq 1+(u-1) < u$, que $r-1 > 0$ y que $tr > 0$ obtenemos $g(u) \geq 0$. □

Lema 4. *Sean $0 < t < 1$, $0 < p < q < \infty$, $0 \leq x$, y. Se tiene*

$$((1-t)x^p + ty^p)^{1/p} \leq ((1-t)x^q + ty^q)^{1/q},$$

con desigualdad estricta excepto cuando $x = y$.

Demostración. Denotamos $x^p = a$, $y^p = b$, $q/r = r$. La desigualdad perseguida se obtiene elevando a la potencia $1/q$ la desigualdad

$$((1-t)a + tb)^r \leq (1-t)a^r + tb^r.$$

Por tanto, basta probar esta otra. Llamamos $b/a = u$ (el caso $a = 0$ es sencillo). Esta nueva desigualdad se obtiene multiplicando por b^r la desigualdad

$$((1-t) + tu)^r \leq (1-t) + tu^r.$$

Por tanto, basta probar esta última, que puede escribirse de la forma

$$(1 + t(u-1))^r \leq 1 + t(u^r - 1),$$

y sabemos que es cierta por el Lema 2.1. La igualdad se da cuando $u = 1$, o sea $x = y$. □

El siguiente lema está íntimamente relacionado con la convexidad de la función exponencial.

Lema 5. *Sean $0 < t < 1$, $0 \leq x$, y. Se tiene*

$$x^{1-t}y^t \leq (1-t)x + ty,$$

y la igualdad se da sólo cuando $x = y$.

Demostración. Puesto que la función exponencial es estrictamente convexa, tenemos que

$$x^{1-t}y^t = e^{(1-t)\log x + t \log y} \leq (1-t)e^{\log x} + te^{\log y}.$$

La igualdad se alcanza si y sólo si

$$\log x = \log y,$$

es decir, si y sólo si $x = y$. □

Pasamos ahora a demostrar la prometida demostración elemental de la versión de la desigualdad de Jensen que da el Teorema 8 . Utilizaremos el método de inducción.

Demostración elemental del Teorema 8. Para $0 < p < q$ debemos demostrar que

$$(\lambda_1 a_1^p + \cdots + \lambda_n a_n^p)^{1/p} \leq (\lambda_1 a_1^q + \cdots + \lambda_n a_n^q)^{1/q}$$

con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Acometemos la demostración por inducción.

- *Base de inducción.* Para $n = 2$ la desigualdad del enunciado es

$$(\lambda_1 a_1^p + \lambda_2 a_2^p)^{1/p} \leq (\lambda_1 a_1^q + \lambda_2 a_2^q)^{1/q} \tag{2.4}$$

con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.
Llamando $(1 - t) = \lambda_1$, $t = \lambda_2$, $x = a_1$ y $y = a_2$, esta desigualdad es cierta por el Lema 4.

- *Paso de inducción.* Supongamos que la desigualdad (2.4) es cierta para un número natural $n \geq 2$ y probemos que, en tal caso, también es cierta para $n + 1$. O sea, perseguimos

$$(\lambda_1 a_1^p + \cdots + \lambda_n a_n^p + \lambda_{n+1} a_{n+1}^p)^{1/p} \leq (\lambda_1 a_1^q + \cdots + \lambda_n a_n^q + \lambda_{n+1} a_{n+1}^q)^{1/q}$$

con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$.

Operando,

$$(\lambda_1 a_1^p + \cdots + \lambda_n a_n^p + \lambda_{n+1} a_{n+1}^p)^{1/p} = ((1 - \lambda_{n+1})A^p + \lambda_{n+1} a_{n+1}^p)^{1/p}$$

donde

$$A = \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} a_1^p + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} a_n^p \right)^{1/p}$$

y se cumple

$$\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} = 1.$$

Aplicando tanto la hipótesis de inducción como que la base de inducción es cierta,

$$\begin{aligned}
((1 - \lambda_{n+1})A^p \lambda_{n+1} a_{n+1}^p)^{1/p} &\leq ((1 - \lambda_{n+1})A^q + \lambda_{n+1} a_{n+1}^q)^{1/q} \\
&\leq \left((1 - \lambda_{n+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} a_1^q + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} a_n^q \right)^{q/q} + \lambda_{n+1} a_{n+1}^q \right)^{1/q} \\
&= \left(\lambda_1 a_1^q + \cdots + \lambda_n a_n^q + \lambda_{n+1} a_{n+1}^q \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Probar que $M_0 \leq M_p$ si $0 \leq p$, consiste en ver que

$$a_1^{\lambda_0} \cdots a_n^{\lambda_n} \leq (\lambda_1 a_1^p + \cdots + \lambda_n a_n^p)^{1/p}.$$

Con la transformación $a_i^p = b_i$ basta ver que

$$b_1^{\lambda_1} \cdots b_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n.$$

Demostramos esta desigualdad por inducción. La base de inducción $n = 2$ es una consecuencia directa del Lema 5. Supongamos que es cierta para un cierto natural n. Dados $b_i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, aplicando como antes la base de inducción y la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}
b_1^{\lambda_1} \cdots b_n^{\lambda_n} b_{n+1}^{\lambda_{n+1}} &= \left(b_1^{\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}} \cdots b_n^{\frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}} \right)^{1-\lambda_{n+1}} b_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \\
&\leq (1 - \lambda_{n+1}) b_1^{\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}} \cdots b_n^{\frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}} + \lambda_{n+1} b_{n+1} \\
&\leq (1 - \lambda_{n+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} b_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} b_n \right) + \lambda_{n+1} b_{n+1} \\
&= \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n + \lambda_{n+1} b_{n+1},
\end{aligned}$$

como queríamos probar.

El crecimiento en el intervalo $(-\infty, 0]$ se demuestra, como de costumbre, utilizando el resultado en $[0, \infty)$ a la n-tupla $(1/a_i)_{i=1}^n$. El crecimiento estricto se debe a que la igualdad en el Lema 4 y en el Lema 5 es estricta excepto cuando $x = y$. □

2.2. Problemas

Pasemos a ver aplicaciones de esta desigualdad a la resolución de problemas.

Problema 5. *Demostrar mediante las desigualdades de medias el Lema 2.*

Solución. Sea $x > 0$. aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica,

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x \cdot \frac{1}{x}\right)^{1/2} = 1.$$

□

Presentamos ahora una nueva prueba de la desigualdad de Bernoulli (Problema 5), que ya resolvimos en la segunda sección basándonos en la convexidad de funciones.

Problema 6 (Desigualdad de Bernoulli)**.** *Sea $a \geq 1$ y $-1 \leq x < \infty$. Entonces*

$$(1 + x)^a \geq 1 + ax.$$

Solución. Haciendo el cambio $t = ax$ y utilizando la desigualdad entre medias (ponderadas) de orden 0 y 1, con pesos 1 y $\frac{1}{n}$, nos queda

$$(1 + \frac{1}{a} \cdot t) \geq (1 + t)^{1/a}, \quad t > -1.$$

Por tanto, el resultado se sigue de la desigualdad entre la media aritmética y geométrica. □

Problema 7. *Sean a, b, c números positivos. Probad que:*

$$3(a + b + c) \geq 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}}.$$

Solución. Sea M_k la media de orden k de a, b, c. La desigualdad del enunciado equivale a tener

$$9M_1 \geq 8M_0 + M_3,$$

que, a su vez, equivale a

$$M_1 \geq \frac{8}{9}M_0 + \frac{1}{9}M_3.$$

Remarcamos los valores de M_0, M_1, M_3.

$$\begin{aligned} M_0 &= \sqrt[3]{abc}, \\ M_1 &= \frac{a + b + c}{3}, \\ M_3 &= \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}}. \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad entre medias (ponderadas) de orden 1 y orden 3 tenemos que

$$\frac{8}{9}M_0 + \frac{1}{9}M_3 \leq \left(\frac{8}{9}M_0^3 + \frac{1}{9}M_3^3\right)^{1/3}.$$

Por tanto, basta probar que

$$M_1 \geq \left(\frac{8}{9}M_0^3 + \frac{1}{9}M_3^3\right)^{1/3},$$

o, lo que es lo mismo,

$$M_1^3 \geq \left(\frac{8}{9}M_0^3 + \frac{1}{9}M_3^3\right)^{1/3}.$$

Volviendo a la expresión en a, b, c esta desigualdad equivale a

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq \frac{8}{9}abc + \frac{1}{9}\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$$

Operando, obtenemos la siguiente cadena de desigualdades equivalentes:

$$\frac{a^3+b^3+c^3+3(ab^2+ac^2+a^2b+a^2c+c^2b+b^2c+2abc)}{3^3} \geq \frac{8}{9}abc + \frac{1}{9}\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$$

$$ab^2+ac^2+a^2b+a^2c+c^2b+b^2c+2abc \geq 8abc.$$

$$ab^2+ac^2+a^2b+a^2c+c^2b+b^2c \geq 6abc.$$

El término de la derecha es una media aritmética, cuya correspondiente media geométrica es

$$\sqrt[6]{a^2bac^2a^2ba^2cc^2bcb^2c} = abc.$$

Por tanto, el resultado se sigue de la desigualdad entre la media geométrica y aritmética. $\square$

Problema 8. *Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Probad que*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Solución. Hacemos el cambio $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ y $z = \frac{1}{c}$ para intentar quitar términos del denominador. Sustituimos en el primer sumando y operamos

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{1}{\frac{a^2(b+c)}{bc}} = \frac{bc}{a^2(b+c)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{c+b}{bc}} = \frac{x^2}{y+z}.$$

Hacemos lo mismo en el segundo sumando

$$\frac{1}{b^3(c+a)} = \frac{1}{\frac{b^2(c+a)}{ca}} = \frac{ca}{b^2(c+a)} = \frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{c+a}{ca}} = \frac{y^2}{x+z}.$$

Y por último, sustituimos en el tercero

$$\frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{1}{\frac{c^2(a+b)}{ab}} = \frac{ab}{c^2(a+b)} = \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{z^2}{x+y}.$$

Agrupamos todo y llegamos a que la desigualdad inicial es equivalente a tener

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Consideremos ahora la función $f(x) = x^{-1}$, para $x > 0$. Hemos probado antes que esta función es convexa (empleando cálculo diferencial, podemos demostrarlo viendo que la segunda derivada es positiva, de hecho $f''(x) = 2/x^3 > 0$.)
Aplicando la desigualdad de Jensen,

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \\
&= xf\left(\frac{y+z}{x}\right) + yf\left(\frac{z+x}{y}\right) + zf\left(\frac{x+y}{z}\right) \\
&\geq (x+y+z)f\left(\frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{x+y+z}\right) \\
&= (x+y+z)f\left(\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}\right) \\
&= (x+y+z)f(2) \\
&= \frac{x+y+z}{2}.
\end{aligned}$$

Como $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$, nos queda que

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2} = \frac{3}{2}.$$

$\square$

Problema 9. *Sean a, b, c números positivos tales que $a+b+c=1$. Probad que*

$$\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}} \leq \frac{1}{3}.$$

Solución. Puesto que

$$\frac{1-a}{2} + \frac{1-b}{2} + \frac{1-c}{2} = \frac{3-(a+b+c)}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

podemos utilizar la desigualdad entre las medias armónica y aritmética ponderadas con estos pesos. Obtenemos

$$\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}} = a^{(1-a)/2}b^{(1-b)/2}c^{(1-c)/2} \leq \left(\frac{1-a}{2}\right)a + \left(\frac{1-b}{2}\right)b + \left(\frac{1-c}{2}\right).$$

Por tanto, es suficiente probar que

$$\left(\frac{1-a}{2}\right)a + \left(\frac{1-b}{2}\right)b + \left(\frac{1-c}{2}\right) \leq \frac{1}{3}.$$

Operando, obtenemos la siguiente cadena de desigualdades equivalentes a la de arriba:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-a}{2}\right)a + \left(\frac{1-b}{2}\right)b + \left(\frac{1-c}{2}\right)c &\leq \frac{1}{3}. \\
\frac{1}{2}[a+b+c-(a^2+b^2+c^2)] &\leq \frac{1}{3}. \\
\frac{1}{2}[1-(a^2+b^2+c^2)] &\geq \frac{1}{3}. \\
a^2+b^2+c^2 &\geq \frac{1}{3}. \\
\frac{a^2+b^2+c^2}{3} &\geq \frac{1}{9}. \\
\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} &\geq \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

El término de la izquierda es una media cuadrática cuya correspondiente media aritmética es

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, el resultado se sigue de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. $\square$

A continuación, proponemos una demostración alternativa de la desigualdad de Nesbitt (ver Problema 2).

Problema 10 (Desigualdad de Nesbitt)**.** *Sean a, b, c números positivos. Probad que:*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

y que la igualdad se da sólamente cuando a=b=c.

Solución. Esta desigualdad es homogénea, es decir, dada cierta terna de números positivos (a, b, c) que cumple la desigualdad, entonces cualquiera que sea $t > 0$, la terna (ta, tb, tc) también la cumple. Así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a + b + c = 1$. Sean: $x = 1 - a$, $y = 1 - b$, $z = 1 - c$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{1}{b+c} - \frac{b+c}{b+c} + \frac{1}{c+a} - \frac{c+a}{c+a} + \frac{1}{a+b} - \frac{a+b}{a+b} \\ &= \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \\ &= \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que probar que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{2},$$

donde la terna de números x, y, z cumple con x, y, $z > 0$, $x + y + z = 3 - 1 = 2$.

Ahora nuestra desigualdad objetivo es equivalente a

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{2}{9},$$

que a su vez equivale a

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{2}{3}.$$

La parte izquierda de la desigualdad es la media armónica de x, y, z. La media aritmética de estos tres números es

$$\frac{x + y + z}{3} = \frac{2}{3}.$$

Como sabemos que la media armónica es menor que la aritmética, queda probada la desigualdad. □

Problema 11. *[Olimpiada Matemática Española, 2009]*

Sean a, b, c números positivos tales que $abc = 1$. Probad que

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Solución. Esta desigualdad es equivalente a

$$\frac{\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2}{3} \leq \frac{1}{4}$$

y elevando ambos miembros a $1/2$ llegamos a

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2}{3}} \leq \frac{1}{2}.$$

Nos damos cuenta de que la parte izquierda corresponde con la media cuadrática de los términos

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2, \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2, \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2,$$

es decir

$$M_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2}{3}}.$$

Queremos ver que $M_2 \geq \frac{1}{2}$, pero como sabemos que $M_2 \geq M_1$, basta con probar que $M_1 \geq \frac{1}{2}$. Veamos si se cumple.

$$M_1 = \frac{\left(\frac{a}{1+ab}\right) + \left(\frac{b}{1+bc}\right) + \left(\frac{c}{1+ca}\right)}{3} \geq \frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{a}{1+ab}\right) + \left(\frac{b}{1+bc}\right) + \left(\frac{c}{1+ca}\right) \geq \frac{3}{2}.$$

Hacemos el cambio: $a = y/x$, $b = z/y$, $c = x/z$, sustituimos en la expresión anterior y operamos.

$$\left(\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}\frac{z}{y}}\right) + \left(\frac{\frac{z}{y}}{1+\frac{z}{y}\frac{x}{z}}\right) + \left(\frac{\frac{x}{z}}{1+\frac{x}{z}\frac{y}{x}}\right) \geq \frac{3}{2}$$
$$\left(\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{z}{x}}\right) + \left(\frac{\frac{z}{y}}{1+\frac{x}{y}}\right) + \left(\frac{\frac{x}{z}}{1+\frac{y}{z}}\right) \geq \frac{3}{2}$$
$$\left(\frac{\frac{y}{x}}{\frac{x+z}{x}}\right) + \left(\frac{\frac{z}{y}}{\frac{y+x}{y}}\right) + \left(\frac{\frac{x}{z}}{\frac{z+y}{z}}\right) \geq \frac{3}{2}.$$

Y llegamos a
$$\left(\frac{y}{x+z}\right) + \left(\frac{z}{y+x}\right) + \left(\frac{x}{z+y}\right) \geq \frac{3}{2},$$
que sabemos que es cierta ya que se trata de la desigualdad de Nesbitt, probada en el problema anterior.

□

Capítulo 3

La desigualdad de Cauchy-Schwarz

La desigualdad para sumas fue publicada por Augustin Louis Cauchy en 1821, mientras que la correspondiente desigualdad para integrales fue establecida por Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1859) y redescubierta por Hermann Amandus Schwarz en 1888. Quizás lo más correcto (aunque no habitual) es llamarla desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.

3.1. Augustin Louis Cauchy

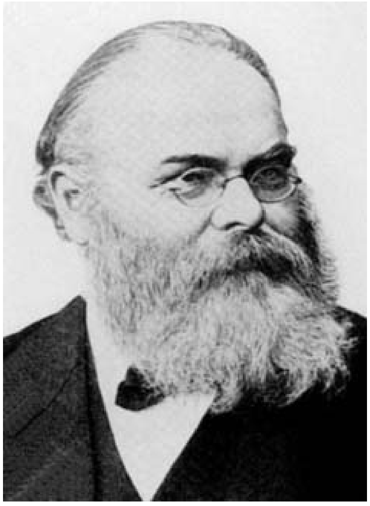
Augustin Louis Cauchy (París, 21 de agosto de 1789 – Sceaux, 23 de mayo de 1857) fue un matemático e ingeniero francés. Estudió Ingeniería en la Escuela Politécnica de París, donde trabajó como profesor de mecánica (1816), y posteriormente, fue ascendido a miembro de la Academia Francesa de las Ciencias.

Su contribución matemática es especialmente notable en la rama del análisis matemático. En 1814 publicó la memoria de la integral definida, que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas. Precisó los conceptos de función, límite y continuidad de manera muy similar a como los conocemos en la actualidad, tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y la noción de correspondencia como idea de función.

También hizo aportaciones a la probabilidad, las ecuaciones diferenciales y la física matemática. Investigó la convergencia y divergencia de las series infinitas y demostró el *Teorema del número poligonal de Fermat*, al que se habían dedicado ilustres matemáticos contemporáneos sin éxito.
Poco antes de morir pronunció la frase: "No me imagino una vida más plena que una vida dedicada a la matemática", mostrando arrepentimiento por el que consideraba su único error en la vida: no haber dedicado más tiempo a las matemáticas.

3.2. Karl Hermann Schwarz

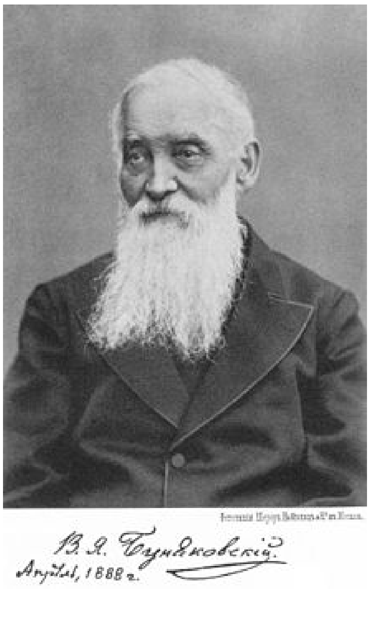
Karl Hermann Amandus Schwarz (Polonia, 25 de enero de 1843 – Berlín, 30 de noviembre de 1921), fue un matemático alemán conocido por su trabajo en análisis matemático. Estudió Química en Berlín aunque fue persuadido por Kummer y Weierstrass para que se centrara en las matemáticas.



Desde 1875 trabajó en la Universidad de Gotinga, donde trató temas como la teoría de funciones, geometría diferencial y cálculo de variaciones. Su trabajo *Búsqueda de una superficie mínima*, acabado en 1867, fue incluido en su *Colección de artículos matemáticos*(1890).
En 1892 se convirtió en miembro de la Academia de las Ciencias de Berlín y fue profesor de la Universidad de esta ciudad. Entre sus alumnos más importantes se encuentran Lipót Fejér, Paul Koebe y Leon Lichtenstein.

3.3. Viktor Yakovlevich Bunyakovsky

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (Ucrania, 16 de diciembre - San Petersburgo, 12 de diciembre de 1889) fue un matemático ruso, miembro y posterior vicepresidente de la Academia de Ciencias de San Petersburgo.
Estudió Matemáticas en la Universidad de la Sorbona, donde se doctoró bajo la supervisión de Cauchy. Dedicó gran parte de su vida a la enseñanza e investigación. Contribuyó de manera significativa en la teoría de números y en la teoría de la probabilidad, aunque también hizo aportaciones en ciencias como la física, mecánica y finanzas. Se le atribuyen más de 150 publicaciones sobre trabajos de investigación.



Es conocido por el descubrimiento de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, ya que la probó para el caso de dimensión infinita en 1859, varios años antes de que lo hiciera Hermann Schwarz, pese a no obtener nunca el reconocimiento merecido. En el año 1875 la Academia de Ciencias de San Petersburgo creó un premio que lleva su nombre como homenaje a su trayectoria en la investigación matemática.

3.4. Introducción

Consideramos el espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales, denotado por $\mathbb{R}$, y una aplicación

$$E \times E \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$$

que verifica

(a) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ para todo x, $y \in E$.

(b) $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in E$.

(c) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$ para todo λ, $\mu \in \mathbb{R}$, para todo x, $y \in E$.

Definimos a partir de esta aplicación

$$\|\cdot\|\colon E \to [0, \infty), \quad x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{3.1}$$

Remarcamos que no exigimos la condición

(d) Si $\langle x, x\rangle = 0$ entonces $x = 0$,

que junto con (a), (b), (c) hace de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto escalar. Realizamos el estudio en este ámbito algo más general debido a que uno de los ejemplos más importantes de aplicación es el espacio $\mathcal{L}^2(\mu)$, definido a partir de un espacio de medida (Ω, Σ, μ) mediante

$$\mathcal{L}^2(\mu) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon \text{medible}, \int_\Omega f^2\, d\mu < \infty\},$$

dotado con la aplicación

$$\mathcal{L}^2(\mu) \times \mathcal{L}^2(\mu) \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \int_\Omega fg\, d\mu, \tag{3.2}$$

verifica las condiciones (a), (b), (c) pero no necesariamente la condición (d). Demostramos estos hechos con precisión. Necesitamos, para ello, un lema previo.

Lema 6. *Para todo x, $y \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$2xy \leq x^2 + y^2,$$

con igualdad si y sólo si $x = y$.

Demostración. Basta considerar que

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0.$$

□

Demostración alternativa del Lema 6. La desigualdad equivale a

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Denotamos $a = |x|$, $b = |y|$. Usando la desigualdad entre la media geométrica y cuadrática,

$$xy \leq |xy| = ab = \left(\sqrt{ab}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2},$$

con igualdad si y sólo si $|x| = |y|$ junto con $xy = |xy|$, que equivalen a $x = y$. □

Teorema 9. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Entonces $\mathcal{L}^2(\mu)$ es un espacio vectorial dotado de la aplicación (3.2) que verifica las condiciones (a), (b), (c).*

Demostración. Teniendo en cuenta las propiedades de la integral, hay dos hechos críticos a demostrar. Son

(i) Si $f,\, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, entonces $f + g \in \mathcal{L}^2(\mu)$. Por tanto $\mathcal{L}^2(\mu)$ es un espacio vectorial.

(ii) Si $f,\, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, entonces $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Por tanto la aplicación (3.2) está bien definida.

Para probar (i) notamos que $f + g$ es medible y que, gracias al Lema 6

$$(f + g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg \leq 2(f^2 + g^2).$$

Por tanto

$$\int_\Omega (f + g)^2 \, d\mu \leq 2 \int_\Omega f^2 \, d\mu + 2 \int_\Omega g^2 \, d\mu < \infty.$$

Para probar (i) notamos que fg es medible y que, también gracias al Lema 6

$$|fg| \leq \frac{f^2 + g^2}{2}.$$

Por tanto

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \frac{1}{2} \int_\Omega f^2 \, d\mu + \frac{1}{2} \int_\Omega g^2 \, d\mu < \infty.$$

□

Antes de volver al marco general notamos que, para el caso concreto del espacio $\mathcal{L}^2(\mu)$, la aplicación dada por (3.1), que denotaramos mediante $\|\cdot\|_2$, viene dada por

$$\|\cdot\|_2 \colon \mathcal{L}^2(\mu) \to [0, \infty), \quad f \mapsto \|f\|_2 = \left(\int_\Omega f^2 \, d\mu \right)^{1/2}.$$

Además,

$$\{f \in \mathcal{L}^2(\mu) \colon \langle f, f \rangle = 0\} = \{f \colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible} \colon f = 0 \ \mu\text{-c.t.p.}\}.$$

3.5. La desigualdad de Cauchy-Schwarz

Teorema 10 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sean E un espacio vectorial y una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon E \times E \to \mathbb{R}$ que verifican (a), (b), (c). Definimos $\|\cdot\|$ como en (3.1). Se tiene que*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

para todo $x,\, y \in E$. Además si se obtiene la igualdad, existe $(s, t) \neq (0, 0)$ tal que

$$sx + ty \in N := \{z \in E \colon \langle z, z \rangle = 0\}.$$

Demostración. Distinguimos dos casos.

- Si $\langle y, y \rangle = 0$. Consideremos los vectores $tx + y$, con t un número real cualquiera. Calculamos el producto $\langle tx + y, x + y \rangle$ que será no negativo gracias a la propiedad (b). Tenemos

  $$0 \leq \langle tx + y, tx + y \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle.$$

  Si aplicamos esta desigualdad con $t = \pm s$, donde $s > 0$ obtenemos

  $$0 \leq s^2 \langle x, x \rangle \pm 2s \langle x, y \rangle.$$

  Multiplicando por $1/(2s)$ obtenemos

  $$0 \leq \frac{s}{2} \langle x, x \rangle \pm \langle x, y \rangle.$$

  Haciendo tender s a cero llegamos a $0 \leq \pm\langle x, y \rangle$. Es decir $|\langle x, y \rangle| = 0$, por lo que se tiene la igualdad. Obviamente, $0 \cdot x + 1 \cdot y \in N$.

- Si $\langle y,y\rangle > 0$. Consideremos los vectores $x+ty$, con t un número real cualquiera. Calculamos el producto $\langle x+ty, x+ty\rangle$ que será no negativo gracias a la propiedad (b). Tenemos

$$0 \leq \langle x+ty, x+ty\rangle = \langle x,x\rangle + t^2\langle y,y\rangle + 2t\langle x,y\rangle.$$

Si escogemos $t = -\dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ tenemos:

$$0 \leq \langle x,x\rangle + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} - 2\frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} = \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle},$$

de donde despejando $\langle x,y\rangle$ se obtiene:

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle,$$

luego sacando raíces cuadradas positivas:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Además, cuando se da la igualdad, $\langle x+ty, x+ty\rangle = 0$. Es decir $1\cdot x + t\cdot y \in N$. □

Continuamos aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en casos concretos.

3.6. La desigualdad de Cauchy-Schwarz en la teoría de integración

Teorema 11. *Sea (Ω,Σ,μ) espacio de medida. Sean f, g medibles tales que $\int f^2\,d\mu$, $\int g^2\,d\mu < \infty$. Entonces*

$$fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

y se tiene que

$$\left|\int fg\,d\mu\right| \leq \left(\int f^2\,d\mu\right)^{1/2}\left(\int g^2\,d\mu\right)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Además, si se da la igualdad, entonces existe $(s,t)\neq(0,0)$ tal que $sf+tg=0$ μ-c.t.p.

Demostración. Es una consecuencia directa de combinar el Teorema 9 con el Teorema 10. □

3.7. La desigualdad de Cauchy-Schwarz para sumas

Teorema 12. *Para todo $n\in\mathbb{N}$ y todo par de n-tuplas de números reales $(x_i)_{i=1}^n$, $(y_i)_{i=1}^n$ se tiene que*

$$\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}.$$

Además, si se da la igualdad, las n-tuplas $(x_i)_{i=1}^n$, $(y_i)_{i=1}^n$ son linealmente dependientes.

Demostración. Basta aplicar el Teorema 11 a la medida de contar sobre el conjunto $\{i\in\mathbb{N}\colon i\leq n\}$. Es decir, la medida que a cada conjunto unipuntual $\{i\}$ le asigna el valor 1, $i=1,\ldots,n$. Remarcamos que, en este caso la única función nula c.t.p. es la n-tupla nula. □

El Teorema 12 es la versión más clásica y elemental de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que podríamos llamar versión discreta de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Aunque hemos llegado hasta ella desde un marco muy general (para ser preciso, desde el marco de los espacios de Hilbert) no hemos utilizado en su demostración conceptos sofisticados ni técnicas avanzadas. De modo que interpretamos que la demostración que hemos dado del Teorema 12 es *elemental.* No obstante, presentamos otra demostración basada en el principio de inducción.

Demostración alternativa del Teorema 12. Hacemos inducción en $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es obvio, pero necesitamos situar la base de inducción en $n = 2$.

• *Base de inducción.* Para $n = 2$ la desigualdad del enunciado es

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2| \leq (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} (y_1^2 + y_2^2)^{1/2},$$

que, elevando al cuadrado, equivale a

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2).$$

Operando obtenemos la cadena de desigualdades equivalentes

$$x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + 2x_1 y_1 x_2 y_2 \leq x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_2^2.$$

$$2x_1 y_1 x_2 y_2 \leq x_2^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2.$$

Esta última se obtiene aplicando el Lema 6 con $x = x_1 y_2$, $y = x_1 y_2$. La igualdad se da cuando $x_1 y_2 - x_1 y_2 = 0$ son linealmente dependientes. Es decir (x_1, x_2), (y_1, y_2) son linealmente dependientes.

• *Paso de inducción.* Supongamos que la desigualdad es cierta para un número natural $n \geq 2$ y probemos que, en tal caso, también es cierta para $n + 1$. Si existe i tal que $x_i = y_i = 0$, el resultado se desprende directamente de la hipótesis de inducción. Suponemos por tanto, que $(x_i, y_i) \neq (0, 0)$ para todo i. Por simetría entre los vectores, podemos suponer además que $x_{n+1} \neq 0$. Aplicando la hipótesis de inducción,

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| + |x_{n+1} y_{n+1}| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2} + |x_{n+1}| \, |y_{n+1}| \, .$$

Aplicando ahora la base de inducción (el caso $n = 2$) obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2} + |x_{n+1} y_{n+1}| &\leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{2/2} + x_{n+1}^2\right)^{1/2} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{2/2} + y_{n+1}^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

La igualdad se da cuando suceden, simultáneamente,

- $(x_i)_{i=1}^n$, $(y_i)_{i=1}^n$ son linealmente dependientes.
- $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ tiene el mismo signo que $x_{n+1} y_{n+1}$.
- $(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2)^{1/2}, |x_{n+1}|)$, $(\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2)^{1/2}, |y_{n+1}|)$ son linealmente dependientes.

De aquí se deduce que $(x_i)_{i=1}^{n+1}$, $(y_i)_{i=1}^{n+1}$ son linealmente dependientes. Por tanto existen $s, t \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_i = s x_i, (i = 1, \ldots, n), \ |y_{n+1}| = t |x_{n+1}|, \ \left(\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2\right)^{1/2} = t \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2\right)^{1/2}.$$

De quí se deduce que $|s| = t$ Por tanto $|y_{n+1}| = |s x_{n+1}|$. Teniendo en cuenta la coincidencia de signos, $y_{n+1} = s x_{n+1}$. □

3.8. El Lema de Titu

Titu Andreescu (Rumanía, 1956), profesor en la Universidad de Texas, es conocido por su destacable trabajo y participación en olimpiadas internacionales de matemáticas. Ha llegado a ser director en las olimpiadas AMC y MOP, entrenador principal de las IMO estadounidenses y presidente de USAMO. Ha publicado numerosos libros sobre problemas y ejercicios de olimpiadas matemáticas, entre los que destaca la desigualdad que trataremos a continuación, conocida como el Lema de Titu.

Teorema 13 (Lema de Titu)**.** *Sean a_1, a_2, $\ldots a_n$, b_1, b_2, $\ldots b_n$ números positivos. Entonces*

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

Demostración. Notemos que la desigualdad del enunciado es equivalente a

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1+\cdots b_n)\geq(a_1+\cdots a_n)^2$$

Hacemos los cambios $a_i/\sqrt{b_i}=a_i$, $\sqrt{b_i}=b_i$, con $1\leq i\leq n$ y llegamos a

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

Concluimos la demostración observando que se trata de la desigualdad de Cauchy-Schwarz para dos secuencias $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n$ de números reales positivos.
La igualdad se alcanza si existe una constante λ tal que $a_i=\lambda\cdot x_i$ para todo $i=1,\ldots,n$. □

3.9. La desigualdad triangular

La desigualdad de Cauchy-Schwarz nos proporciona un argumento a la vez sencillo y preciso para demostrar que los espacios euclídeos cumplen la desigualdad triangular. Esto es, si definimos en $\mathbb{R}^n$ la distancia

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^n(y_i-x_i)^2\right)^{1/2}\qquad\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n),\,\vec{y}=(y_1,\ldots,y_n),$$

se tiene que

$$d(\vec{x},\vec{y})\leq d(\vec{x},\vec{z})+d(\vec{z},\vec{y}),\quad\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^n.\tag{3.4}$$

Si denotamos

$$\|\vec{x}\|_2=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2},\quad\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n),$$

la desigualdad (3.4) se obtiene como consecuencia directa de la desigualdad

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|_2\leq\|\vec{x}\|_2+\|\vec{y}\|_2,\quad\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n.$$

Este hecho es consecuencia inmediata de aplicar el siguiente resultado a la medida de contar sobre el conjunto $\{1,2\}$.

Teorema 14. *Sean E un espacio vectorial y una aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon E\times E\to\mathbb{R}$ que verifican (a), (b), (c). Definimos $\|\cdot\|$ como en* (3.1)*. Se tiene que*

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

para todo x, $y\in E$. Además, si se obtiene la igualdad existen s, $t\geq0$ con $(s,t)\neq(0,0)$ tal que

$$sx+ty\in N:=\{z\in E\colon\langle z,z\rangle=0\}.$$

Demostración. Gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x,y\rangle\leq\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|=(\|x\|+\|y\|)^2,$$

con igualdad si y sólo si $\langle x,y\rangle\geq0$ y existe $(s,t)\neq(0,0)$ tal que $sx+ty\in N$. Estas condiciones implican que s y t no tienen signos opuestos. Por tanto podemos conseguir que ambos sean no negativos. □

La desigualdad triangular nos permite, sin usar cálculo diferencial, ampliar nuestro catálogo de funciones convexas.

- para cada $d>0$ la función $x\mapsto\sqrt{d^2+x^2}$ es convexa.

Demostración. Gracias a la desigualdad triangular se tiene, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y todo $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned}\sqrt{d^2 + ((1-t)x + ty)^2} &= \|(d, (1-t)x + ty)\|_2 \\ &= \|(1-t)(d, x) + t(d, y)\|_2 \\ &\leq \|(1-t)(d, x)\|_2 + \|t(d, y)\|_2 \\ &= (1-t)\|(d, x)\|_2 + t\|(d, y)\|_2 \\ &= (1-t)\sqrt{d^2 + x^2} + t\sqrt{d^2 + y^2}.\end{aligned}$$

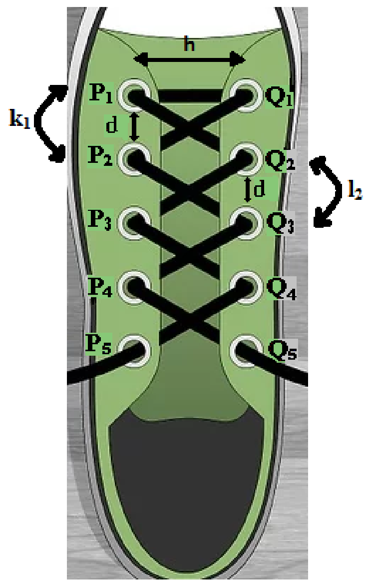
□

Problema 12 (Problema de la lazada). *¿De qué manera debemos atarnos un zapato para optimizar la cantidad de cuerda empleada en la lazada?*

Solución. Vamos a plantear este problema en términos matemáticos.

Tenemos $2n$ puntos en el plano ($n \in \mathbb{N}$), situados n de ellos en una recta r_p y los n restantes en otra recta r_q paralela a la anterior. Los denotamos $(P_i)_{i=1}^n$ y $(Q_i)_{i=1}^n$, respectivamente.

Suponemos que los puntos de las n-tuplas están ordenados (esto es, P_{i+1} no está en el segmento P_1P_i) e imponemos que el segmento P_iQ_i es perpendicular a las rectas r_p y r_q. Denotamos h la distancia entre ambas rectas y d_i la distancia de P_i a P_{i+1} (que coincide con la distancia de Q_i a Q_{i+1}). Aunque no es imprescindible en nuestro razonamiento, supondremos que las distancias entre diferentes agujeros del zapato son iguales, esto es, que existe $d > 0$ de modo que $d_i = d$ para todo $i = 1, \ldots n-1$.



Una lazada es una poligonal con vértices en $P_1, \ldots, P_n$, $Q_1, \ldots, Q_n$ que cumple las siguientes condiciones:

(i) Todos los puntos $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n$ pertenecen a la poligonal y aparecen una sola vez.

(ii) Empieza en P_n y acaba en Q_n.

(iii) Si el origen de un segmento de la poligonal es un punto P_i en la recta r_p, su destino es un punto Q_j en la recta r_q (o viceversa). Además en los segmentos anteriores a alcanzar uno de los puntos P_1 o Q_1 se tiene $j \leq i$, y en los segmentos posteriores a que los dos puntos P_1 y Q_1 se alcancen se tiene $i \leq j$.

Notamos que las condiciones anteriores implican que el primer segmento será P_1Q_1 o Q_1P_1.

Llamamos $k_1, \ldots, k_a$ a los *saltos entre agujeros* que la poligonal produce en la recta r_p, y $l_1, \ldots, l_b$ a los que se producen en la recta r_q. Las tuplas de enteros naturales $(k_i)_{i=1}^a$ y $(l_i)_{i=1}^b$ cumplen

$$\sum_{i=1}^{a} k_i = \sum_{i=1}^{b} l_i = n$$

y determinan unívocamente la lazada. Observando la cantidad de segmentos perpendiculares a las rectas r_p y r_q y los que no lo son, nos damos cuenta de que la longitud de la cuerda la podemos expresar como

$$h + \sum_{i=1}^{a} \left(\sqrt{h^2 + k_i^2 d^2} + (k_i - 1)d \right) + \sum_{i=1}^{b} \left(\sqrt{h^2 + l_i^2 d^2} + (l_i - 1)d \right).$$

En el caso de que nuestra lazada siga *saltos de uno en uno*, esto es $k_i = l_i = 1$ para $i = 1, \ldots, n$, obtenemos que la longitud es

$$h + \left(\sqrt{h^2 + d^2} \right) 2n,$$

que, en términos de sucesiones $(k_i)_{i=1}^a$ y $(l_i)_{i=1}^b$ generales, podemos escribir como

$$h + \sum_{i=1}^{a} \sqrt{h^2 + d^2} k_i + \sum_{i=1}^{b} \sqrt{h^2 + d^2} l_i.$$

Por tanto, si conseguimos probar que

$$\sqrt{h^2 + k^2 d^2} + (k-1)d \geq k\sqrt{h^2 + d^2}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ con igualdad si y sólo si $k = 1$, tendremos que el caso *saltar de uno en uno* es el óptimo (el de menor longitud) y el único óptimo.

Usamos para ello que la función

$$f(x) = \sqrt{d^2 + x^2}$$

es estrictamente convexa.

Se tiene

$$\begin{aligned} k\sqrt{h^2 + d^2} = kf(h) &= kf\left(\frac{1}{k} h + \frac{1}{k} 0\right) \\ &\leq k \left(\frac{1}{k} f(kh) + \frac{k-1}{k} f(0) \right) \\ &= k \left(\frac{1}{k} \sqrt{k^2 h^2 + d^2} + \frac{k-1}{k} d \right) \\ &= \sqrt{h^2 + k^2 d^2} + (k-1)d, \end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si $\frac{k-1}{k} = 0$ (es decir, si y sólo si $k = 1$).

□

3.10. Problemas

Comenzamos con una nueva prueba de una desigualdad que ya resolvimos en la sección anterior mediante la desigualdad de medias.

Problema 13. *[Olimpiada Matemática Española, 2009]*

Sean a, b, c números positivos tales que $abc = 1$. Probad que

$$\left(\frac{a}{1+ab} \right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc} \right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca} \right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Solución. Podemos ver la parte izquierda de la desigualdad como

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2+\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2+\left(\frac{c}{1+ca}\right)^2=\|\vec{x}\|_2^2=\|\vec{x}\|_2\|\vec{y}\|_2$$

donde

$$\|\vec{x}\|=\left(\frac{a}{1+ab},\frac{b}{1+bc},\frac{c}{1+ca}\right)$$

y

$$\|\vec{y}\|=\left(\frac{c}{1+ca},\frac{a}{1+ab},\frac{b}{1+bc}\right).$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz sabemos que

$$\|\vec{x}\|_2\|\vec{y}\|_2\geq\langle\|\vec{x}\|,\|\vec{y}\|\rangle.$$

Aplicando esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2+\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2+\left(\frac{c}{1+ca}\right)^2\\
&=\|\vec{x}\|_2\|\vec{y}\|_2\\
&\geq\langle\|\vec{x}\|,\|\vec{y}\|\rangle\\
&=\left(\frac{ac}{(1+ca)(1+ab)}\right)^2+\left(\frac{ab}{(1+ab)(1+bc)}\right)^2+\left(\frac{bc}{(a+bc)(1+ca)}\right)^2\\
&=\frac{ac(1+bc)+ab(1+ca)+bc(1+ab)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}\\
&=\frac{ac+ab+bc+a+b+c}{1+ab+bc+ca+a+b+c+1}.
\end{aligned}$$

Por tanto, basta demostrar que

$$\frac{ac+ab+bc+a+b+c}{1+ab+bc+ca+a+b+c+1}\geq\frac{3}{4}.$$

Operando, vemos que esta última desigualdad equivale a

$$4(ac+ab+bc)+4(a+b+c)\geq 6+3(ab+bc+ca)+3(a+b+c),$$

que a se vez es equivalente a

$$ac+ab+bc+a+b+c\geq 6.$$

Teniendo en cuenta que $abc=1$, esta expresión es equivalente a

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+a+b+c\geq 6.$$

Lo reagrupamos y nos queda

$$a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}\geq 6.$$

Por el lema 6, sabemos que

$$\underbrace{a+\frac{1}{a}}_{\geq 2}+\underbrace{b+\frac{1}{b}}_{\geq 2}+\underbrace{c+\frac{1}{c}}_{\geq 2}.$$

Por lo que concluimos que

$$a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}\geq 6$$

es cierta. □

A continuación presentamos una nueva resolución del Problema 6, que ya hemos probado en la segunda sección mediante la desigualdad de Jensen.

Problema 14. *Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Probad que*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Solución. Hacemos el cambio $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, como hemos hecho en el problema 5. Sustituyendo y operando obtenemos

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{z+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Multiplicamos por $x + y + z$ la parte izquierda de la desigualdad

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{z+y}\right)(x+y+z) = \frac{1}{2}\left((x+y)+(y+z)+(x+z)\right)\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{z+y}\right).$$

Aplicamos Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left((x+y)+(y+z)+(x+z)\right)\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{z+y}\right)\\
&\geq \frac{1}{2}\left\langle\left(\sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}, \sqrt{x+y}\right), \left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{z+x}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)\right\rangle\\
&= \frac{1}{2}(x+y+z)^2.
\end{aligned}$$

Es decir, tenemos que

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{z+y}\right) \geq \frac{1}{2}\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2}.$$

Usamos ahora la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica,

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Operamos

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 3\sqrt[3]{1} = 3.$$

Aplicamos esto a la desigualdad que teníamos

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{z+y}\right) \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Por lo que

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{z+y}\right) \geq \frac{3}{2}$$

como queríamos probar. □

Problema 15. *Sean a, b, c números positivos. Probad que*

$$\frac{a}{b(b+c)^2} + \frac{b}{b(c+a)^2} + \frac{c}{a(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}$$

Solución. Observamos que

$$\frac{a}{b(b+c)^2} = \frac{\frac{a^2}{(b+c)^2}}{ab}, \qquad \frac{b}{b(c+a)^2} = \frac{\frac{b^2}{(c+a)^2}}{bc}, \qquad \frac{c}{a(a+b)^2} = \frac{\frac{c^2}{(a+b)^2}}{ac}.$$

Teniendo esto en cuenta podemos reescribir la parte izquierda de la desigualdad del enunciado como

$$\frac{a}{b(b+c)^2} + \frac{b}{b(c+a)^2} + \frac{c}{a(a+b)^2} = \frac{\frac{a^2}{(b+c)^2}}{ab} + \frac{\frac{b^2}{(c+a)^2}}{bc} + \frac{\frac{c^2}{(a+b)^2}}{ac}.$$

Por el Lema de Titu llegamos a que

$$\frac{\frac{a^2}{(b+c)^2}}{ab} + \frac{\frac{b^2}{(c+a)^2}}{bc} + \frac{\frac{c^2}{(a+b)^2}}{ac} \geq \frac{(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b})^2}{ab+bc+ca}.$$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Nesbitt,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

concluimos que

$$\frac{(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b})^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

□

Pasamos a ver una nueva resolución de la desigualdad de Nesbitt, que ya hemos probado en la segunda sección 2 (Problema 2) y en la sección 3 (Problema 11).

Problema 16 (Desigualdad de Nesbitt)**.** *Dados $a, b, c > 0$, probad que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Solución. Multiplicamos numerador y denominador de cada fracción del miembro de la izquierda por a, b, c, respectivamente

$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{ab+bc} + \frac{c^2}{bc+ac}.$$

Por el Lema de Titu llegamos a que

$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{ab+bc} + \frac{c^2}{bc+ac} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Basta probar que

$$2(a+b+c)^2 \geq 6(ab+bc+ca).$$

Simplificamos la expresión y nos queda

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

que es equivalente a

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

que es cierto para números reales $a, b, c > 0$ cualesquiera. □

Capítulo 4

La desigualdad de Hölder

Otto Ludwing Hölder (Stuttgart, 22 de diciembre de 1859 – Leipzig, 29 de agosto de 1937) fue un matemático alemán. Estudió Ingeniería, durante un año, en el Politécnico de Stuttgart y desde 1877 estudió en la Universidad de Berlín. En 1882 presentó su tesis doctoral en la Universidad de Tübingen y trabajó en la Universidad de Leipzig desde 1899 hasta su jubilación. Es conocido por sus contribuciones tanto en álgebra como en análisis matemático.

Se interesó por el álgebra y, en concreto por la teoría de grupos, influenciado por Kronecker y Klein. Probó el conocido *Teorema de Jordan-Hölder*, investigó los grupos finitos simples y publicó un artículo mostrando que los grupos finitos simples hasta orden 200 eran conocidos. En 1895 redactó un extenso trabajo sobre extensiones de grupos e introdujo los conceptos de automorfismo interno y externo.

No menos importantes fueron sus aportaciones en el análisis matemático. Investigó las funciones analíticas y procedimientos de suma usando medias aritméticas. Probó su conocida desigualdad de Hölder y la condición que lleva su nombre, empleada en áreas del análisis como la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y los espacios de funciones. Recordamos que una función $f\colon I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo, satisface una condición de Hölder de parámetro $\alpha > 0$ si existe una constante C tal que

$$|f(y) - f(x)| \leq C|x - y|^{\alpha}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Las funciones de Hölder de parámetro 1 son las llamadas funciones de Lipschitz. El concepto pierde sentido para $\alpha > 1$, pues entonces las funciones de Hölder son constantes.

A partir de 1900 comenzó a interesarse por la geometría lineal proyectiva y más adelante, por cuestiones filosóficas.

4.1. Introducción

Consideremos un espacio de medida (Ω, Σ, μ), una función $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y otra función medible $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\|f\|_{\infty,\mu} := \operatorname{sup\,es}|f| < \infty$. Entonces

$$|fg| \leq \|f\|_{\infty,\mu}\,|f| \ \ \mu\text{-c.t.p.}$$

Por tanto $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y, además,

$$\left| \int_\Omega fg \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \|f\|_{\infty,\mu} \, \|f\|_1.$$

Este resultado tiene una relación muy estrecha con el Teorema 11. Podríamos decir que el Teorema 11 se apoya en que el par $(2,2)$ *es un par de índices conjugados* mientras que el que acabamos de comentar se basa en que el par $(1,\infty)$ *es un par de índices conjugados*. En general, definimos el siguiente concepto.

Definición 1. Sean $p, q \in (0,\infty]$. Decimos que (p,q) es un par de índices conjugados y que q es el conjugado de p si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Comentario. Si (p,q) es un par de índices conjugados entonces, forzosamente $p,\ q \in [1,\infty]$. Además para cada $p \in [1,\infty]$ existe un único $q \in [1,\infty]$ tal que q es conjugado de p.

Definición 2. Sea (Ω, Σ, μ) espacio de medida positiva y $1 \leq p < \infty$. Sea $f \colon \Omega \to [0,\infty]$ medible.

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega f^p \, d\mu \right)^{1/p} \in [0,\infty]$$

si $1 \leq p < \infty$, y

$$\|f\|_p = \sup_{w \in \Omega} \mathrm{es}\, f(w)$$

si $p = \infty$.

En realidad, es más correcto denotar estos calibradores mediante $\|f\|_{p,\mu}$, sobre todo en el caso $p = \infty$, en el que puede no quedar suficientemente claro si para definirlo tomamos el supremo o el supremo esencial. Sin embargo, en esta sección únicamente manejaremos la definición que se obtiene a partir del supremo esencial.

4.2. Enunciado y demostración

Comenzamos con un lema auxiliar.

Lema 7. *Sean x e y números en $[0,\infty]$. Sean p y q definidos como $1/p + 1/q = 1$, con p tal que $1 < p < \infty$. Entonces,*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad 0 \leq x, y < \infty.$$

Además, la igualdad se da si y sólo si o bien $x^{1/p} = y^{1/q}$ o bien uno de los números es ∞ y el otro es no nulo.

Demostración. Aplicando el Lema 5 con $t = 1/q$, de modo que $1 - t = 1/p$, obtenemos

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b, \quad a, b \geq 0.$$

Consideramos ahora a tal que $x^{1/p} = a$ y b tal que $y^{1/q} = b$. Llegamos a

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q,$$

como buscábamos. Además la igualdad se obtiene si y sólo si $x^{1/p} = y^{1/q}$.

Cuando o bien $x = \infty$ o bien $y = \infty$, la desigualdad es obvia. □

Teorema 15 (Desigualdad de Hölder para funciones positivas)**.** *Sean p y q exponentes conjugados, $1 \leq p, q \leq \infty$. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Sean f y g funciones medibles en Ω, con recorrido en $[0,\infty]$. Entonces*

$$\int_\Omega fg \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Además, la igualdad se produce si y sólo si se dan uno de los casos siguientes.

- $\int_\Omega fg\,d\mu = \infty$.
- *Existe* $C \in [0,\infty)$ *tal que* $f^{1/p} = Cg^{1/q}$, *o existe* $C \in [0,\infty)$ *tal que* $g^{1/q} = Cf^{1/p}$.

Demostración. El razonamiento en el caso $p = \infty$ y, por tanto $q = 1$, corresponde al indicado al comienzo de la sección. Además la igualdad se da si y sólo si $fg = f\|g\|_\infty$ μ-c.t.p. Esta igualdad conduce a uno de los dos casos descritos en el enunciado

El caso $p = 1$ y, por tanto $q = \infty$, es simétrico y vale el mismo razonamiento.

En el caso en que $1 < p < \infty$ y, por tanto $1 < q < \infty$, denotamos $A = \|f\|_p$ y $B = \|g\|_q$. Vamos a distinguir tres casos.

• Si $A = 0$, entonces $f = 0$ μ-c.t.p. Por tanto, $fg = 0$ en μ-c.t.p., y se verifica la desigualdad. Realmente, se da la igualdad $\int_\Omega fg\,d\mu = \|f\|_p\|g\|_q = 0$.

• Si $A > 0$ y $B = \infty$, entonces $\|f\|_p\|g\|_q = \infty$ y la desigualdad es trivial. La igualdad se produce, obviamente, cuando $\int_\Omega fg\,d\mu = \infty$.

• Supongamos que $0 < A < \infty$, $0 < B < \infty$. Tomamos

$$F = \frac{f}{A}, \quad G = \frac{g}{B}. \tag{4.1}$$

Esto proporciona

$$\int_\Omega F^p\,d\mu = \int_\Omega G^q\,d\mu = 1.$$

Se tiene que, gracias al Lema 7,

$$F(\omega)G(\omega) \le \frac{1}{p}F(\omega)^p + \frac{1}{q}G(\omega)^q$$

para todo $\omega \in \Omega$. Integrando obtenemos

$$\frac{1}{AB}\int_\Omega fg\,d\mu = \int_\Omega FG\,d\mu \le \frac{1}{p}\int_\Omega F\,d\mu + \frac{1}{q}\int_\Omega G\,d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

que conduce fácilmente a la desigualdad del teorema. La igualdad, en este tercer caso, se da cuando $F^{1/p} = G^{1/q}$ μ-c.t.p. Esto conduce a $f^{1/p} = A^{1/p}B^{-1/q}g^{1/q}$.

La argumentación de arriba demuestra que para que se verifique la igualdad es necesario que se cumpla una de las dos condiciones del enunciado. Que la primera de ellas es suficiente es consecuencia de la desigualdad ya probada, pues, en este caso, $\infty = \int_\Omega fg\,d\mu \le \|f\|_p\|g\|_q$. Si se da el segundo caso que propone el enunciado, o sea, $f^{1/p} = Cg^{1/q}$, se tiene

$$\int_\Omega fg\,d\mu = C^p\|g\|^q, \quad \|f\|_p = C^p\|g\|^{q-1},$$

y, por tanto, también se produce la igualdad. □

A continuación, damos una versión de la desigualdad de Hölder para funciones con valores reales.

Definición 3. Sea (Ω, Σ, μ) espacio de medida positiva y $1 \le p < \infty$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medible.

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f^p|\,d\mu\right)^{1/p}$$

si $1 \le p < \infty$, y

$$\|f\|_p = \sup_{w\in\Omega} \mathrm{es}\,|f(w)|$$

si $p = \infty$.

Decimos que una función $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ si $\|f\|_p < \infty$.

Definición 4. Sea $x \in \mathbb{R}$, denotamos por $sign(x)$ al signo de x y lo definimos como

$$\begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Teorema 16 (Desigualdad de Hölder)**.** *Si p y q son exponentes conjugados, $1 \leq p \leq \infty$, y si $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ y $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, entonces $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$, y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{4.2}$$

Además, la igualdad se da si y sólo si $\operatorname{sign}(f) = \operatorname{sign}(g)$ *μ-c.t.p. y, además, o bien existe $C \in [0, \infty)$ tal que $|f|^{1/p} = C|g|^{1/q}$, o bien existe $C \in [0, \infty)$ tal que $|g|^{1/q} = C|f|^{1/p}$.*

Demostración. Aplicando el Teorema 15 a $|f|$ y $|g|$. Obtenemos que

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu = \int_\Omega |f||g|\, d\mu \leq \||f|\|_p \||g|\|_q = \|f\|_p \|g\|_q < \infty.$$

Puesto que fg es medible, esto nos da que $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Además,

$$\left| \int_\Omega fg\, d\mu \right| \leq \int_\Omega |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty.$$

La igualdad se produce si y sólo si suceden, simultáneamente, $fg = |fg|$ y $|f|^{1/p} = C|g|^{1/q}$ para alguna constante $C \in [0, \infty)$ (o a la inversa). Notamos que la primera condición equivale a $\operatorname{sign}(f) = \operatorname{sign}(g)$ μ-c.t.p □

Comentario. Si aplicamos el Teorema 15 en el caso en que $p > 1$, $\mu(\Omega) = 1$ y $f \equiv 1$, obtenemos la desigualdad

$$\int_\Omega g\, d\mu \leq \left(\int_\Omega 1\, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_\Omega g^q\, d\mu \right)^{1/q} = \left(\int_\Omega g^q\, d\mu \right)^{1/q}.$$

con $p \geq 1$.

Si ahora tomamos f medible positiva $1 \leq a < b < \infty$, podemos elegir p tal que $b = aq$. Si aplicamos lo anterior a $g = f^a$ obtenemos

$$\int_\Omega f^a\, d\mu \leq \left(\int_\Omega f^{aq}\, d\mu \right)^{1/q} = \left(\int_\Omega f^b\, d\mu \right)^{a/b}.$$

Elevando a $1/a$ llegamos a

$$\underbrace{\left(\int_\Omega f^a\, d\mu \right)^{1/a}}_{M_a} \leq \underbrace{\left(\int_\Omega f^b\, d\mu \right)^{1/b}}_{M_b}.$$

O sea, llegamos a la desigualdad entre la media de orden a y la media de orden b. El decir, la desigualdad de medias (Teorema 5) es consecuencia de la desigualdad de Hölder.

Comentario. En el caso en que $p = 2$ y, por tanto $q = 2$, la desigualdad de Hölder, en la versión que da el Teorema 16, se convierte exactamente en el Teorema 11.

Por lo tanto, podemos decir que en un cierto sentido, la desigualdad de Hölder implica la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Capítulo 5

La desigualdad de reordenamiento

No resulta sencillo encontrar el origen de esta desigualdad. Aunque no cabe duda de que por su sencillez era conocida mucho antes, su enunciado aparece por primera vez, al menos hasta donde alcanza nuestro conocimiento, en el manual sobre desigualdades [6].

5.1. Introducción y enunciado

Sean $(a_i)_{i=1}^n$, $(b_i)_{i=1}^n$ n-tuplas de números positivos. Realizamos *sumas de productos de elementos de una n-tupla contra elementos de la otra.* O sea,

$$a_{\alpha(1)}b_{\beta(1)} + \cdots + a_{\alpha(i)}b_{\beta(i)} + \cdots + a_{\alpha(n)}b_{\beta(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha(i)}b_{\beta(i)} \tag{5.1}$$

donde α, β son permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, i, \ldots, n\}$; o sea, biyecciones de este conjunto en sí mismo.

Nos preguntamos por el mayor y menor valor que alcanza (5.1). La respuesta, como veremos, es que el mayor se alcanza cuando ambas n-tuplas siguen el mismo orden con el criterio de mayor a menor. El mínimo, cuando siguen órdenes opuestos.

Demos un enunciado preciso:

Teorema 17. *Sean $(a_i)_{i=1}^n$, $(b_i)_{i=1}^n$ tales que*

$$\begin{aligned} a_1 > a_2 > \ldots > a_n \geq 0 \\ b_1 > b_2 > \ldots > b_n \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\beta(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \tag{5.2}$$

donde β es una permutación de $\{1, \ldots, i, \ldots, n\}$. La segunda desigualdad se convierte en identidad cuando y sólo cuando β es la identidad. La primera desigualdad se convierte en identidad cuando y sólo cuando β viene dada por $\beta(i) = n + i - 1$.

5.2. Demostración

Vamos a demostrar la segunda desigualdad por el método de inducción. Remarcamos que la demostración de la primera es totalmente análoga.

Demostración. • *Base de inducción.* Para $n = 2$, por hipótesis del Teorema 17 tenemos que $a_1 > a_2$ y $b_1 > b_2$, es decir,

$$(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geq 0.$$

Operando llegamos a que

$$a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1 + a_1b_1 \geq 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$a_1b_1 + a_2b_2 \geq a_1b_2 + a_2b_1,$$

como queríamos probar (con igualdad cuando $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$).

- *Paso de inducción.* Suponemos que es cierto para un cierto número natural n. Veamos qué ocurre para $n+1$.

En este caso la desigualdad (5.2) es de la forma

$$a_1b_{\beta(1)} + \cdots + a_nb_{\beta(n)} + a_{n+1}b_{\beta(n+1)} \leq a_1b_1 + \cdots + a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1}.$$

Sea i tal que $\beta(i) = n+1$. Tenemos que $\beta(i) > \beta(n+1)$ y por lo tanto, $b_{\beta(i)} \geq b_{\beta(n+1)}$. Además sabemos que $a_i \leq a_{n+1}$. Por lo que

$$0 \leq (a_{n+1} - a_i)(b_{\beta(i)} - b_{\beta(n+1)}).$$

Observamos que

$$a_ib_{n+1} + a_{n+1}b_{\beta(n+1)} \leq a_ib_{\beta(n+1)} + a_{n+1}b_{n+1}.$$

De lo anterior deducimos que

$$a_1b_{\beta(1)} + \cdots + a_ib_{n+1} + \cdots + a_{n+1}b_{\beta(n+1)} < a_1b_{\beta(1)} + \cdots + a_ib_{\beta(n+1)} + \cdots + a_{n+1}b_{n+1}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción,

$$a_1b_{\beta(1)} + \cdots + a_ib_{\beta(n)} + \cdots + a_nb_{\beta(n)} \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

De esta manera llegamos a

$$a_1b_{\beta(1)} + a_2b_{\beta(2)} + \cdots + a_nb_{\beta(n)} + a_{n+1}b_{\beta(n+1)} \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1},$$

como queríamos probar. □

Comentario. En el anterior teorema, si imponemos que los términos de la n-tupla considerados son solamente decrecientes en lugar de estrictamente decrecientes, es más tedioso describir cuándo se produce la igualdad en la desigualdad. Pero, por supuesto, la desigualdad sigue siendo válida.

Corolario 2. *Sean* $(a_i)_{i=1}^n$, $(b_i)_{i=1}^n$ *tales que*

$$\begin{array}{c} a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0 \\ b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0. \end{array}$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^n a_ib_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^n a_ib_{\beta(i)} \leq \sum_{i=1}^n a_ib_i,$$

donde α, β *son permutaciones de* $\{1, \ldots, i, \ldots, n\}$.

Demostración. Sea β una permutación y sea $\varepsilon > 0$, realizamos una adecuada pequeña alteración de las n-tuplas del enunciado. Es decir, notamos que existen

$$\hat{a}_1 > \hat{a}_2 > \ldots > \hat{a}_n \geq 0$$

$$\hat{b}_1 > \hat{b}_2 > \ldots > \hat{b}_n \geq 0$$

tales que

$$\left| \sum_{i=1}^n a_ib_{\beta(i)} - \sum_{i=1}^n \hat{a}_i\hat{b}_{\beta(i)} \right| < \varepsilon.$$

Por el Teorema 17,

$$\sum_{i=1}^n \hat{a}_i\hat{b}_{\beta(i)} \leq \sum_{i=1}^n \hat{a}_i\hat{b}_i.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\beta(i)} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + 2\epsilon.$$

Como ε puede tomarse arbitrariamente pequeño,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\beta(i)} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

De manera análoga se demuestra la primera desigualdad. $\square$

Comentario. Existe una versión de la desigualdad de reordemiento en el ambiente de la teoría abstracta de integración. Dado el espacio de medida (Ω, Σ, μ), denotamos por $\mathcal{L}^0(\mu)$ el espacio de funciones medibles f tales que

$$D_f(t) := \mu(\{\omega \in \Omega \colon |f(\omega)| > t\}) < \infty, \quad 0 < t < \infty.$$

D_f se llama *función de distribución* de f. Puede demostrarse que dada una función positiva $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$, existe una única función $f^* \colon [0, \mu(\Omega)) \to [0, \infty)$ decreciente continua a derecha con la misma función de distribución que f, es decir,

$$\mu(\{\omega \in \Omega \colon |f(\omega)| > t\}) = |(\{0 \le x < \mu(\Omega) \colon |f^*(x)| > t\})|, \quad 0 < t < \infty,$$

donde $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue. Tal función f^* se llama *reordenada decreciente* de f.

Con esta notación se tiene, para f, $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ positivas,

$$\int_\Omega fg\, d\mu \le \int_0^{\mu(\Omega)} f^*(x) g^*(x)\, dx.$$

(Ver [2] para más detalle). Supongamos que tenemos dos sucesiones

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge 0,$$
$$b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0,$$

y una permutación β. Pensamos en las n-tuplas $f = (a_i)_{i=1}^n$, $g = (b_{\beta(i)})_{i=1}^n$ como funciones en el espacio de medida que proporciona la medida contadora μ en $\Omega = \{1, \ldots, n\}$. Entonces,

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[i-1,i)}, \quad g^* = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{[i-1,i)}.$$

Por tanto,

$$\int_\Omega fg\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\beta(i)}, \quad \int_0^{\mu(\Omega)} f^*(x) g^*(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Recuperamos así una de las desigualdades que nos proporciona el Corolario 2.

5.3. Problemas

Problema 17. *Sean a, b, c números positivos. Probad que*

$$a + b + c \le \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \le \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

Solución. Podemos suponer sin pérdida de generalidad, $a \le b \le c$. Esto implica que $a^2 \le b^2 \le c^2$ y $1/a \ge 1/b \ge 1/c$. De este modo tenemos que

$$a + b + c = a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} \le b^2 \cdot \frac{1}{a} + c^2 \cdot \frac{1}{b} + a^2 \cdot \frac{1}{c},$$

y también,

$$a + b + c \le c^2 \cdot \frac{1}{a} + a^2 \cdot \frac{1}{b} + b^2 \cdot \frac{1}{c}.$$

Sumando las dos desigualdades anteriores y dividiendo entre 2 llegamos a

$$a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b},$$

quedando probada la primera desigualdad del enunciado.
Para la segunda, observamos que $a \leq b \leq c$ también implica que $a^3 \leq b^3 \leq c^3$ y que $1/bc \leq 1/ca \leq 1/ab$. Tenemos pues,

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} = a^3 \cdot \frac{1}{bc} + b^3 \cdot \frac{1}{ca} + c^3 \cdot \frac{1}{ab} \geq b^3 \cdot \frac{1}{bc} + c^3 \cdot \frac{1}{ca} + a^3 \cdot \frac{1}{ab} = \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{a^2}{b},$$

y también,

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq c^3 \cdot \frac{1}{bc} + a^3 \cdot \frac{1}{ca} + b^3 \cdot \frac{1}{ab} = \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a}.$$

Sumando estas dos últimas desigualdades,

$$2\left(\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}\right) \geq \frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b},$$

que prueba la segunda desigualdad. $\square$

Capítulo 6

La desigualdad de Chebyshev

Pafnuty Lvovich Chebyschov (Okatovo, 16 de mayo de 1821 – San Petesburgo, 8 de diciembre de 1894) es conocido principalmente por su trabajo en las áreas de probabilidad y estadística.

Comenzó sus estudios universitarios de Matemáticas en 1837 y cuatro años después, los terminó destacando por su nivel. En 1846 defendió su tesis *Un intento de análisis elemental de la teoría probabilística.* Fue profesor de matemáticas en San Petesburgo y fundó una importante escuela de matemáticos en esta ciudad. Más adelante se convirtió en miembro de la Academia Imperial de Ciencias y posteriormente, fue elegido miembro honorario de la Sociedad Matemática de San Petesburgo (1893).

Según mencionó él mismo, fue su profesora de música de la infancia la que "llevó su mente a la exactitud y el análisis."

Se dedicó al estudio de la teoría de los números y el cálculo de probabilidades. Entre sus aportaciones más notables destacan la generalización de la *Ley de los grandes números*, el *Teorema del límite central* y las desigualdades que llevan su nombre. Además de la que incluimos en este manuscrito, recordamos, siendo (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, la que en teoría de integración abstracta se enuncia como la desigualdad de Chebyshev,

$$\mu(\{\omega \in \Omega\colon f(\omega) \geq t\}) \leq \frac{1}{t}\int_\Omega f\,d\mu, \quad f \geq 0 \text{ medible.} \tag{6.1}$$

La desigualdad (6), aunque sencilla de demostrar (basta comparar f con la función $t\chi_A$, con $A = \{\omega \in \Omega\colon f(\omega) \geq t\}$), tiene importantes aplicaciones en *Análisis Matemático*. En *Teoría de la Probabilidad* se conoce como *desigualdad de Chebyshev* la que afirma que, si μ es una medida de probabilidad,

$$\mu(\{\omega \in \Omega\colon |f(\omega) - m| \geq t\sigma\}) \leq \frac{1}{t^2}, \quad f \text{ variable aleatoria de media } m \text{ y desviación típica } \sigma,$$

que es una sencilla consecuencia de (6).

Remarcamos que Chebyshev es una de las posibles maneras de trasladar del alfabeto cirílico el apellido de este matemático ruso.

6.1. Desigualdad de Chebyshev sobre sumas

Teorema 18. *Sean $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ y $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, entonces*

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

Si, en cambio, tenemos que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ y $b_n \geq b_{n-1} \geq \cdots \geq b_1$, entonces

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

La igualdad en ambos casos se alcanza para el caso $n = 1$.

Esta desigualdad de Chebyschev es una consecuencia de la desigualdad de reordenamiento. Podemos verlo en la siguiente demostración:

Demostración. Por la desigualdad de reordenamiento, sabemos que la suma

$$S = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n}$$

es máxima cuando $i_k = k$, es decir, cuando se tiene que $S = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.
Teniendo esto en cuenta, es obvio que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_1.$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \geq a_1 b_3 + a_2 b_4 + \cdots + a_n b_2.$$
$$\cdots$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_{n-1}.$$

Sumando todas estas desigualdades, obtenemos

$$n(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n) \geq (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)$$

que equivale a

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

como queríamos probar.

De manera análoga, se prueba la segunda desigualdad enunciada teniendo en cuenta que la suma

$$S = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n}$$

es máxima cuando $i_k = n + 1 - k$, es decir, cuando se tiene que $S = a_1 b_n + \cdots + a_n b_1$.

$\square$

6.2. Problemas

Problema 18. *Probar que si x, y, z son números positivos tales que $xyz = 1$ entonces*

$$\frac{x^5y^5}{x^2+y^2} + \frac{y^5z^5}{y^2+z^2} + \frac{x^5z^5}{x^2+z^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Solución. Hacemos el cambio $x = 1/a, y = 1/b, z = 1/c$ de manera que $abc = 1$. Sustituimos y operamos

$$\begin{aligned}\frac{x^5y^5}{x^2+y^2} + \frac{y^5z^5}{y^2+z^2} + \frac{x^5z^5}{x^2+z^2} &= \frac{1}{a^3b^3(b^2+a^2)} + \frac{1}{b^3c^3(c^2+b^2)} + \frac{1}{c^3a^3(a^2+c^2)} \\ &= \frac{c^3}{a^2+b^2} + \frac{a^3}{b^2+c^2} + \frac{b^3}{a^2+c^2}.\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $a \leq b \leq c$ de modo que

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} \leq \frac{b^2}{c^2+a^2} \leq \frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

Por la desigualdad de Chebyshev para sumas llegamos a

$$\frac{a^3}{b^2+c^2} + \frac{b^3}{c^2+a^2} + \frac{c^3}{a^2+b^2} \geq \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}\right).$$

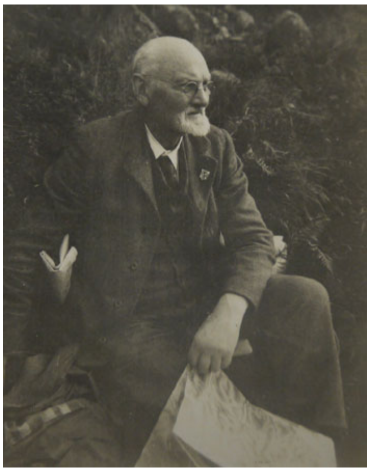
Notemos que la parte derecha de la desigualdad es mayor o igual que $3/2$, por tratarse de la desigualdad de Nesbitt, como queríamos probar. □

Capítulo 7

Desigualdad de Muirhead

Robert Franklin Muirhead (Glasgow, 1860 – 1941) fue un matemático escocés. Estudió Matemáticas en la Universidad de Glasgow, donde se graduó con excelentes resultados. Continuó sus estudios en la Universidad Santa Catarina de Cambridge. Allí ganó en 1886 el Premio Smith por su ensayo sobre *Las leyes del movimiento de Newton*.

Fue elegido miembro de la Sociedad Matemática de Edimburgo en 1884 y fue nombrado Miembro Honorífico de esta Sociedad en 1912. Publicó varios artículos en diferentes revistas pero su fama se debe a la desigualdad que trataremos a continuación: la desigualdad de Muirhead.



7.1. Introducción

Sean $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ dos n-tuplas decrecientes positivas, o sea, tales que

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0,$$
$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_n \geq 0.$$

Diremos que $\alpha \succ \beta$ (α *mayoriza* a β) si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \cdots + \beta_n$, y además se cumple que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{k} \beta_i.$$

Dado el vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ donde $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, definimos la suma simétrica

$$F_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} x_{\pi(1)}^{\alpha_1} x_{\pi(2)}^{\alpha_2} \cdots x_{\pi(n)}^{\alpha_n},$$

donde S_n es el grupo simétrico sobre n elementos, o sea, el conjunto de permutaciones de $(1, \ldots, i, \ldots, n)$.
Para esta definición utilizamos el convenio $x^0 = 1$ para todo $x \geq 0$ (en particular, $0^0 = 1$).

7.2. El Teorema de Muirhead

Teorema 19 (Teorema de Muirhead)**.** *Sean α y β dos n-tuplas decrecientes positivas tales que $\alpha \succ \beta$, se tiene que*

(a) Siempre que $x_1, \ldots, x_n \geq 0$,

$$F_\alpha (x_1, \ldots, x_n) \geq F_\beta (x_1, \ldots, x_n). \tag{7.1}$$

(b) Si $x_1, \ldots, x_n > 0$ no todos iguales y $\alpha \neq \beta$, (7.1) produce una desigualdad estricta.

Antes de abordar la demostración veamos un lema sobre funciones convexas.

Lema 8. *Sea $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sean $x, y \in I$, se tiene que*

$$\varphi_{x,y}\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto \varphi_{x,y}(\lambda) = \varphi((1-\lambda)x + \lambda y) + \varphi((1-\lambda)y + \lambda x)$$

es una función decreciente en $[0, 1/2]$ y creciente en $[1/2, 1]$. Además, si $x \neq y$ y φ es estrictamente convexa, entonces, el crecimiento y decrecimiento de $\varphi_{x,y}$ en ambas zonas es estricto.

Demostración. Sean x, $y \in I$ y $\lambda \in [0, 1]$. Debemos demostrar que si μ es un punto interior al segmento que une λ con $1-\lambda$ entonces $\varphi_{x,y}(\mu) \leq \varphi_{x,y}(\lambda)$, con desigualdad estricta en los casos descritos en el enunciado.

Tomamos $0 < a < 1$ tal que $a\lambda + (1-a)(1-\lambda) = \mu$. Notamos que entonces,

$$(1-a)\lambda + a(1-\lambda) = 1 - \mu.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_{x,y}(\lambda) =&(1-a)\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) + a\varphi((1-\lambda)y + \lambda x)\\
&+ a\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) + (1-a)\varphi((1-\lambda)y + \lambda x)\\
\geq&\varphi((1-a)((1-\lambda)x + \lambda y) + a((1-\lambda)y + \lambda x))\\
&+ \varphi((1-a)((1-\lambda)y + \lambda x) + a((1-\lambda)x + \lambda y))\\
=&\varphi_{x,y}(\mu).
\end{aligned}$$

En caso de que $x \neq y$ y φ sea estrictamente convexa, las dos desigualdades de convexidad utilizadas arriba son estrictas. ☐

Demostración del Teorema 19. Utilizaremos el método de inducción.

- *Base de inducción.* Para $n = 2$, tenemos que la desigualdad (7.1) para $x_1, x_2 \geq 0$, es de la forma

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + x_2^{\alpha_1} x_1^{\alpha_2} \geq x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} + x_2^{\beta_1} x_1^{\beta_2},$$

donde, α_1, α_2, β_1, β_2 cumplen $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$, $\alpha_1 \geq \beta_1$. Todo esto equivale a la existencia de $t \geq 0$ y $1 \geq \lambda \geq \mu \geq 1/2$ tales que

$$\alpha_1 = \lambda t,\ \alpha_2 = (1-\lambda)t,\ \beta_1 = \mu t,\ \beta_2 = (1-\mu)t.$$

Si x_1, $x_2 > 0$, existen x, $y \in \mathbb{R}$ tales que

$$x_1^t = e^x, \quad x_2^t = e^y.$$

Usando la propiedad multiplicativa de la función exponencial, el lema 8 nos da, puesto que la función exponencial es estrictamente simétrica,

$$\begin{aligned}
x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + x_2^{\alpha_1} x_1^{\alpha_2} &= e^{(1-\lambda)x} e^{\lambda y} + e^{(1-\lambda)y} e^{\lambda x}\\
&= e^{(1-\lambda)x + \lambda y} + e^{(1-\lambda)y + \lambda x}\\
&\geq e^{(1-\mu)x + \mu y} + e^{(1-\mu)y + \mu x}\\
&= e^{(1-\mu)x} e^{\mu y} + e^{(1-\mu)y} e^{\mu x}\\
&\geq x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} + x_2^{\beta_1} x_1^{\beta_2}.
\end{aligned}$$

En caso de que $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (\beta_1, \beta_2)$ tenemos $\lambda > \mu$. En caso de que $x_1 \neq x_2$ tenemos $x \neq y$. Por tanto, la desigualdad es estricta.

En caso de que o bien $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$, la desigualdad es clara.

• *Paso de inducción.* Suponemos que se cumple para cualquier número natural $n \geq 2$. Veamos si se cumple para $n+1$. Consideramos los vectores:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \succ (\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}).$$

Podemos dividir el problema en dos casos:

Caso previo. Suponemos que las sucesiones tienen un elemento en común.
Sea $\alpha_j = \beta_j := \gamma$ tal elemento, tenemos que

$$\begin{aligned} F_\alpha(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= \sum_{\pi \in S_{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} x_{\pi(i)}^{\alpha_i} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\substack{\pi \in S_{n+1} \\ \pi(j)=k}} \prod_{i=1}^{n+1} x_{\pi(i)}^{\alpha_i} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} x_k^\gamma \sum_{\substack{\pi \in S_{n+1} \\ \pi(j)=k}} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n+1} x_{\pi(i)}^{\alpha_i} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} x_k^\gamma F_{\hat{\alpha}_j}(\hat{\mathbf{x}}_k) \end{aligned}$$

donde $\hat{\alpha}_j = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$ y $\hat{\mathbf{x}}_k = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

Este mismo logro, aplicado a la sucesión β, nos da

$$F_\beta(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} x_k^\gamma F_{\hat{\beta}_j}(\hat{\mathbf{x}}_k).$$

Notamos que $\hat{\alpha}_j \succ \hat{\beta}_j$. Luego

$$F_{\hat{\alpha}_j}(\hat{\mathbf{x}}_k) \geq F_{\hat{\beta}_j}(\hat{\mathbf{x}}_k) \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Sumando llegamos a que

$$F_\alpha(x_1, \ldots, x_{n+1}) \geq F_\beta(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

En caso de que $\alpha \neq \beta$, entonces $\hat{\alpha}_j \neq \hat{\beta}_j$. Si, además, la $(n+1)$-tupla no es constante, existe k tal que la n-tupla $\hat{\mathbf{x}}_k$ no es constante. Por tanto, si $x_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots n$, $F_{\hat{\alpha}_j}(\hat{\mathbf{x}}_k) > F_{\hat{\beta}_j}(\hat{\mathbf{x}}_k)$. En consecuencia, al sumar, obtenemos

$$F_\alpha(x_1, \ldots, x_{n+1}) > F_\beta(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Caso general. Siempre existe $1 \leq j \leq n$ tal que

$$\alpha_j \geq \beta_j, \quad \alpha_{j+1} \geq \beta_{j+1}.$$

Si no fuera así, como $\alpha_1 \geq \beta_1$, tendríamos $\alpha_2 > \beta_2$, $\alpha_3 > \beta_3$, $\ldots$, $\alpha_{n+1} > \beta_{n+1}$. Luego

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1} > \beta_1 + \cdots + \beta_{n+1},$$

y llegamos a un absurdo.

Así pues, tenemos que para el elemento $j \in \{1, \ldots, n, n+1\}$ elegido, $\alpha_j \geq \beta_j \geq \beta_{j+1} \geq \alpha_{j+1}$.

Vamos a proponer dos modificaciones de la $(n+1)$-tupla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{n+1})$:

(i) Cambiamos, en los lugares $(j, j+1)$, el par (α_j, α_{j+1}) por el par $(\beta_j, \alpha_j + \alpha_{j+1} - \beta_j)$, y dejamos como estaban los demás términos.

Así, todos los términos de la $(n+1)$-tupla siguen siendo no negativos, y la suma de todos ellos no cambia. Sin embargo, no está claro que la nueva $(n+1)$-tupla sea decreciente. Para que lo sea tiene que suceder que

$$\beta_j \geq \alpha_j + \alpha_{j+1} - \beta_j.$$

O sea,

$$\beta_j \geq \frac{\alpha_j + \alpha_{j+1}}{2}. \tag{7.2}$$

(ii) Cambiamos, en los lugares $(j, j+1)$, el par (α_j, α_{j+1}) por el par $(\alpha_j + \alpha_{j+1} - \beta_{j+1}, \beta_{j+1})$, y dejamos como estaban los demás términos.
De nuevo todos los términos de la $(n+1)$-tupla siguen siendo no negativos, y la suma de todos ellos no cambia. Para que sea decreciente tiene que ocurrir que

$$\alpha_j + \alpha_{j+1} - \beta_{j+1} \geq \beta_{j+1}.$$

O sea,

$$\frac{\alpha_j + \alpha_{j+1}}{2} \geq \beta_{j+1}. \tag{7.3}$$

Notamos que o bien sucede (7.2) o bien sucede (7.3). De no ser así, tendríamos que

$$\beta_j < \frac{\alpha_j + \alpha_{j+1}}{2} < \beta_{j+1},$$

y llegaríamos a la contradicción $\beta_j < \beta_{j+1}$.

Si se verifica (7.2), tomamos la $(n+1)$-tupla γ que se obtiene mediante el paso (i), mientras que si se verifica (7.3), tomamos la que se obtiene mediante el paso (ii). En cualquier caso se tiene que

- α tiene elementos en común con γ (sólo modificados dos de ellos y el número total de elementos es $n+1 \geq 3$).
- γ tiene elementos en común con β (o bien el elemento j-ésimo o bien el $j+1$-ésimo).

Además, $\alpha \succ \gamma \succ \beta$. Por lo que, aplicando el *Caso previo*, podemos concluir que

$$F_\alpha(x_1, \ldots, x_{n+1}) \geq F_\gamma(x_1, \ldots, x_{n+1}) \geq F_\beta(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Si $x_i > 0$ para todo i, no todos iguales, y además, $\alpha \neq \beta$, entonces o bien $\alpha \neq \gamma$ o bien $\gamma \neq \beta$. Por tanto, una de las dos desigualdades descritas arriba es estricta y, en consecuencia,

$$F_\alpha(x_1, \ldots, x_{n+1}) > F_\beta(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

□

7.3. Problemas

Muchas desigualdades son consecuencia de esta desigualdad. Como ejemplo, vamos a probar la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica usando la desigualdad de Muirhead.

Problema 19. *Probad la desigualdad entre la media aritmétca y geométrica, es decir, que*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$.

Solución. Realizando el cambio de variable $x_i = \sqrt[n]{a_i}$, vemos que esta desigualdad es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^n \geq n \cdot a_1 a_2 \ldots a_n, \quad x_i \geq 0.$$

Observamos que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^n = n \cdot F_\alpha(a_1, \ldots, a_n), \quad \text{con} \quad \alpha = (n, 0, 0, \ldots, 0)$$

y

$$n \cdot a_1 a_2 \ldots a_n = F_\beta(a_1, \ldots, a_n), \quad \text{con} \quad \beta = (1, 1, \ldots, 1).$$

Notamos que

$$[n, 0, 0, \ldots, 0] \succ [1, 1, \ldots, 1],$$

de manera que la desigualdad $AM \geq GM$ queda probada como consecuencia de la desigualdad de Muirhead. □

Problema 20. *Dados $a, b, c > 0$, probad que*

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Solución. Desarrollando y operando ambos lados de la desigualdad llegamos a

$$a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b \geq 6abc.$$

Esto es equivalente a

$$F_\alpha(a, b, c) \geq F_\beta(a, b, c), \quad \text{con } \alpha = (2, 1, 0) \text{ y } \beta = (1, 1, 1),$$

que es cierto por el Teorema de Muirhead, ya que $(2, 1, 0) \succ (1, 1, 1)$. □

Problema 21. *Sean a, b, c números positivos tal que abc=1, probad que*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Nota. Antes de pasar a resolver este problema observamos que cuando el producto de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es 1, entonces

$$F_\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_\beta(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ y $\beta = (\alpha_1 - r, \alpha_2 - r, \cdots, \alpha_n - r)$, donde el vector α es el conjunto de exponentes, y $r \in \mathbb{R}$.

Solución. Operando vemos que la desigualdad se expresa también como

$$\frac{2[b^3c^3(c+a)(a+b) + a^3c^3(b+c)(c+a) + a^3b^3(b+c)(c+a)]}{2[a^3b^3c^3(b+c)(c+a)(a+b)]} \geq \frac{3[a^3b^3c^3(b+c)(c+a)(a+b)]}{2[a^3b^3c^3(b+c)(c+a)(a+b)]}.$$

Quitando denominadores obtenemos la desigualdad equivalente

$$2[b^3c^3(c+a)(a+b) + a^3c^3(b+c)(c+a) + a^3b^3(b+c)(c+a)] \geq 3[a^3b^3c^3(b+c)(c+a)(a+b)],$$

y desarrollando la expresión del numerador,

$$2(ab^3c^4 + a^2b^3c^3 + b^4c^4 + ab^4c^3 + a^4bc^3 + a^4c^4 + a^3b^2c^3 + a^3bc^4 + a^3b^4c + a^3b^3c^2 + a^4b^4 + a^4b^3c) \geq$$
$$\geq 3(a^4b^4c^3 + c^4b^5c^3 + a^5b^3c^4 + a^4b^4c^4 + a^4b^4c^4 + a^3b^5c^4 + a^4b^3c^5 + a^3b^4c^5).$$

Agrupamos términos

$$2(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4) + 2(a^4b^3c + a^4c^3b + b^4c^3a + b^4a^3c + c^4a^3b + c^4b^3a) + 2(a^3b^3c^2 + b^3c^3a^2 + c^3a^3b^2) \geq$$
$$\geq 3(a^5b^4c^3 + a^5c^4b^3 + b^5c^4a^3 + b^5a^4c^3 + c^5a^4b^3 + c^5b^4c^3) + 6a^4b^4c^4.$$

Esto es equivalente a

$$F_\alpha(a,b,c) + 2 \cdot F_\beta(a,b,c) + F_\gamma(a,b,c) \geq 3 \cdot F_\delta(a,b,c) + F_\epsilon(a,b,c),$$

con $\alpha = (4,4,0), \beta = (4,3,1), \gamma = (3,3,2), \delta = (5,4,3)$ y $\epsilon = (4,4,4)$. Observamos que

$$4+4+0 = 4+3+1 = 3+3+2 = 8$$

pero

$$5+4+3 = 4+4+4 = 12.$$

Para poder aplicar la desigualdad de Muirhead, los exponentes deben sumar lo mismo, así que tomando $r = 4/3$ y siguiendo la nota anterior, llegamos a

$$F_\delta(a,b,c) = F_\zeta(a,b,c),$$

con $\zeta = (11/3, 8/3, 5/3)$ y

$$F_\epsilon(a,b,c) = F_\eta(a,b,c),$$

con $\eta = (8/3, 8/3, 8/3)$.
Puesto que

$$\begin{aligned}(4,4,0) &\succ (11/3, 8/3, 5/3),\\ (4,3,1) &\succ (11/3, 8/3, 5/3),\\ (3,3,2) &\succ (8/3, 8/3, 8/3),\end{aligned}$$

entonces, gracias a la desigualdad de Muirhead,

$$\begin{aligned}F_\alpha(a,b,c) &\geq F_\zeta(a,b,c),\\ F_\beta(a,b,c) &\geq F_\zeta(a,b,c),\\ F_\gamma(a,b,c) &\geq F_\eta(a,b,c).\end{aligned}$$

Sumando estas tres desigualdades obtenemos la desigualdad requerida. $\square$

Capítulo 8

La desigualdad de Schur

Issai Schur (Bielorrusia, 10 de enero de 1875 - Israel, 10 de enero de 1941), estudiante de Ferdinand Georg Frobenius, fue conocido principalmente por su trabajo en representaciones de grupos, aunque también trabajó en combinatoria y física teórica.

8.1. Introducción

Partimos de la suma cíclica de una función f de n variables, definida como

$$\sum_{cicl} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{c^k_{(1)}}, x_{c^k_{(2)}}, \cdots, x_{c^k_{(n)}}),$$

siendo $c \in S_n$ una permutación con c^n la identidad. La desigualdad de Schur determina el signo de una suma cíclica asociada a la función de 3 variables definida mediante

$$f(x, y, z) = x^p(x - y)(y - z),$$

donde $p \geq 1$ y las variables x, y, z son no negativas.

8.2. Enunciado y demostración

Teorema 20. *(Desigualdad de Schur) Sean $a, b, c \geq 0$ y $p \geq 1$, probad que*

$$a^p(a - b)(a - c) + b^p(b - a)(b - c) + c^p(c - a)(c - b) \geq 0.$$

además, la desigualdad es estricta excepto cuando dos de los tres números son iguales, y el tercero o bien es igual a ellos o bien es nulo.

Demostración. Esta expresión es simétrica ya que si permutamos todas las variables entre sí, permanece invariante. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, $a \geq b \geq c \geq 0$. Notamos que cuando no sucede ni $a = b = c$ ni que dos términos sean iguales y el otro nulo, nos encontramos en uno de los siguientes casos:

(a) $a > b \geq c$,

(b) $a \geq b > c > 0$.

Se tiene

$$\begin{aligned} a^p(a - b)(a - c) &\geq a^p(a - b)(b - c) \\ &\geq b^p(a - b)(b - c) \\ &= -b^p(b - a)(b - c). \end{aligned}$$

Además, cuando se cumple (a), la primera desigualdad realizada es estricta. Luego

$$a^p(a - b)(a - c) + b^p(a - b)(c - b) \geq 0,$$

con desigualdad estricta si se verifica (a). Por otra parte,

$$c^p(c-a)(c-b) \geq 0,$$

con desigualdad estricta si ocurre (b). Luego

$$\underbrace{a^p(a-b)(a-c)+b^p(b-a)(b-c)}_{\geq 0}+\underbrace{c^p(c-a)(c-b)}_{\geq 0} \geq 0,$$

con desigualdad estricta si sucede o bien (a) o bien (b). □

8.3. Problemas

Problema 22. *Sean a, b, c números no negativos tales que $a+b+c=1$. Demostrad que*

$$a^3+b^3+c^3+6abc \geq \frac{1}{4}.$$

Solución. La desigualdad es equivalente a

$$4(a^3+b^3+c^3+6abc) \geq 1.$$

Por tanto, la desigualdad es equivalente a la desigualdad homogénea

$$4(a^3+b^3+c^3+6abc) \geq (a+b+c)^3 \quad \forall \quad a,b,c>0.$$

Manipulando, obtenemos la desigualdad equivalente

$$4a^3+4b^3+4c^3+24abc \geq a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3b^2c+3ac^2+3bc^2+6abc,$$

que podemos factorizar como

$$4a^3+4b^3+4c^3+24abc \geq a^3+b^3+c^3+3(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b))+6abc.$$

Juntando términos semejantes, obtenemos la desigualdad equivalente

$$3a^3+3b^3+3c^3+18abc \geq 3(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)),$$

y dividiendo entre 3 llegamos a

$$a^3+b^3+c^3+6abc \geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b). \tag{8.1}$$

Teniendo ahora en cuenta la desigualdad de Schur para $p=1$,

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0,$$

y desarrollando los productos, obtenemos

$$a(a^2-ab-ac+bc)+b(b^2-ab-bc+ac)+c(c^2-ac-bc+ab) \geq 0,$$

que es equivalente a

$$a^3-a^2b-a^2c+abc+b^3-ab^2-b^2c+abc+c^3-ac^2-bc^2+abc \geq 0.$$

Reordenando los factores convenientemente obtenemos

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2$$

y, agrupando adecuadamente y sacando factor común, llegamos a

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^3(a+b),$$

Puesto que $3\cdot abc \geq 0$, (8.1) es cierta.
La igualdad se alcanza cuando, simultáneamente, $abc=0$ y la desigualdad de Schur produce una igualdad. O sea, cuando dos de los tres números a,b,c son $1/2$ y el tercero es 0. □

Conclusión

En el momento de decidir qué *Trabajo Fin de Grado* realizar, me interesé desde un principio por este tema. Me pareció muy acertada la idea de poder combinar teoría y práctica de manera que ambas partes tengan un peso similar en el trabajo.
Este proyecto se basa en las asignaturas de la rama de *Análisis* que hemos cursado, fundamentalmente en la asignatura de *Análisis Real y Funcional* estudiada en cuarto.

En la parte teórica he podido plasmar lo aprendido en esta materia y ampliar mis conocimientos. A la hora de aprender y demostrar nuevos enunciados he encontrado algunas dificultades derivadas de la abstracción y complejidad que requiere la comprensión de ciertos textos matemáticos. Con constancia y con la ayuda de mi tutor ha sido posible solventar estos obstáculos y poder hacer un buen seguimiento de los mismos.

En la parte práctica he tenido la oportunidad de familiarizarme con las desigualdades, ya que ha sido esencial asimilar los nuevos conceptos y manipular nuevos símbolos y términos para poder llegar hasta la solución de los problemas. Debido a que una gran parte de éstos han sido extraídos de Olimpiadas dirigidas a estudiantes preuniversitarios, la manera de incorporar nuevas ideas me ha resultado, en los casos más sencillos, semejante al modo de aprender a razonar las matemáticas en el instituto.

Igualmente interesante considero el hecho de haber podido conocer y aprender un poco más sobre LaTeX, herramienta que encuentro elemental para redactar cualquier escrito científico y en particular, de carácter matemático.

Entre las aplicaciones que hemos tratado, algunas me han hecho reafirmarme en la idea de la relevancia que tienen las matemáticas en la vida cotidiana, y en especial, las desigualdades. Sirva como ejemplo el *Problema de la lazada*, analizado en el primer capítulo. Este problema me ha hecho ser consciente de las consecuencias inmediatas que tienen las desigualdades en la vida real, como es el caso de la importancia que puede tener para una empresa del calzado el hecho de poder cumplir sus objetivos minimizando la cantidad de cuerda necesaria en el proceso de fabricación, y por tanto, aumentando su beneficio.

Y del mismo modo que esta posible aplicación en el ámbito empresarial, las desigualdades matemáticas se presentan en innumerables situaciones diarias, a pesar de que en muchas ocasiones pasen desapercibidas. Por ejemplo, tienen especial interés en áreas como la medicina, tecnología o economía, e incluso se ponen de manifiesto en la naturaleza del universo. Muchas veces pensamos en las Leyes de la Física como ecuaciones (o igualdades). Sin embargo, algunas de ellas, como la *Segunda Ley de la Termodinámica*, que mide el crecimiento de la entropía en el universo, se expresa en términos de una desigualdad.

Bibliografía

[1] *50 años de Olimpiada Matemática en España 1964-2014*. Real Sociedad matemática Española, first edition, 2014.

[2] Colin Bennett and Robert Sharpley. *Interpolation of operators*, volume 129 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[3] Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega, and Rogelio Valdez Delgado. *Inequalities: a mathematical olympiad approach*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[4] Jean Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Méthodes. Premiere edition, 1968.

[5] Dušan Djukić, Vladimir Janković, Ivan Matić, and Nikola Petrović. *The IMO compendium*. Problem Books in Mathematics. Springer, New York, 2006. A collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004.

[6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge, at the University Press, 1952. 2d ed.

[7] Thomas J. Mildorf. Olympiad inequalities. https://www.artofproblemsolving.com/articles/files/MildorfInequalities.pdf. Accessed 6-6-2016.

[8] José H. Nieto. Desigualdades. http://www.acm.org.ve/desigual.pdf. Accessed 6-6-2016.

[9] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[10] Leonardo Urbina. Notas en desigualdades. http://www.acm.org.ve/desigualdades_urbina.pdf. Accessed 6-6-2016.

[11] Milivoje Lukic Zoran Kadelburg, Dusan Dukic and Ivan Matic. Inequalities of karamata, schur and muirhead and some applications. http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/14/tm813.pdf. Accessed 6-6-2016.